

Дифференциальная и алгебраическая топология многообразий

спецкурс проф. А.Б. Скопенкова, первый семестр 2013/14 уч. года

Для многообразий важнейшие методы алгебраической топологии наиболее наглядны. Это позволяет быстро добраться до по-настоящему интересных и сложных результатов. На спецкурсе изучаются основные методы алгебраической и дифференциальной топологии, полезные для ее приложений. Это гомотопические классы гладких отображений, конструкция Понтрягина, гомологии, характеристические классы, векторные расслоения, хирургия. В частности, будут изучены два знаменитых примера: нестандартной 7-мерной сферы (Милнор) и узла $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ (Хефлигер). Для изучения спецкурса достаточно знакомства с основами топологии многообразий (например, в объеме параграфов 3, 5, 8, 9, 10 из [S].)

Основная часть материала будет изучаться в виде решения задач участниками (с подробными указаниями и последующим разбором на занятии). Будут предложены красивые задачи для исследования.

Программа

1. Три классические проблемы топологии. Нестандартные сферы Милнора. Зацепление Уайтхеда.

2. Конструкция Понтрягина: оснащенные многообразия и их кобордизмы. Гомотопическая классификация отображений многообразия в окружность, n -мерного многообразия в n -мерную сферу (Хопф) и $(n+1)$ -мерного многообразия в n -мерную сферу (Хопф-Понтрягин-Фрейденталь-Стинрод-Ву). Гомотопическая классификация ненулевых касательных векторных полей на многообразиях. Реализация подмногообразиями целочисленных циклов коразмерности 1.

3. Гомотопическая классификация отображений многообразия в бесконечномерные проективные пространства (вещественное и комплексное). Реализация подмногообразиями циклов коразмерности 1 и 2.

4. (Повторение.) Гомологии многообразий. Пересечение в гомологиях многообразий. Двойственность Пуанкаре (простая и сложная части).

5. Эйлерова характеристика — инвариант кобордизма. Сигнатура — инвариант ориентированного кобордизма. Аддитивность сигнатуры. Классификация маломерных многообразий с точностью до кобордизма (формулировка).

6. Геометрическое определение характеристических классов Штифеля-Уитни и Понтрягина. Числа Штифеля-Уитни и Понтрягина — инварианты кобордизма. Теорема Тома о классификации многообразий с точностью до кобордизма (формулировка).

7. Нормальные классы Уитни. Препятствия Уитни к погружаемости и к вложимости многообразий. Инвариант Уитни вложений многообразий.

8. Векторные расслоения. Теорема о трубчатой окрестности. Нормальные расслоения. Несуществование алгебр с делением и невложимость проективных пространств. Классификация расслоений.

9. Теорема Хирцебруха о сигнатуре для 4- и 8-мерных многообразий. набросок доказательства. Применение: инвариант Милнора 7-мерных гомотопических сфер. Хирургия и классификация 7-мерных гомотопических сфер (с наброском доказательства). Решение проблемы Кервера (формулировка).

10.* Классификация оснащенных узлов и тел с ручками. Инвариант Хефлигера.

Литература.

[FF] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фуks, Курс гомотопической топологии, Москва, Наука, 1989.

[KM] M. Kervaire and J. W. Milnor, Groups of homotopy spheres, I, Ann. of Math. 77 (1963), 504–537.

[MS74] Дж. Милнор, Дж. Сташефф, Характеристические классы, Москва, Мир, 1979.

[P06] В. В. Прасолов, Элементы теории гомологий, <http://www.mccme.ru/prasolov>

[S] А.Б. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, Москва, МЦНМО, в печати, <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.