

“Пространства Соболева, выпуклый анализ и вероятность”

Настоящий курс знакомит слушателей с важными геометрическими конструкциями и инструментами, возникающими в теории вероятностей и случайных процессах, а также соответствующим аналитическим аппаратом. Будет показано, как классические задачи и теории (изопериметрическая задача, теория Минковского, пространства Соболева) взаимодействуют с современными идеями (оптимальная транспортировка, транспортные неравенства, анализ на многообразиях с мерой, гамма-2 исчисление). В курсе будут представлены широкий спектр различных инструментов, возникающий в геометрическом анализе (метод полугрупп, транспортировка мер, тензорный подход, различные виды функциональных неравенств и т.д.), а также знакомство с приложениями и известными открытыми проблемами из выпуклого анализа, мотивирующими развитие данного направления.

Программа курса

1. Евклидово изопериметрическое неравенство. Неравенство Брунна-Минковского.
2. Транспортировка мер и задача Канторовича. Уравнение Монжа-Ампера.
3. Пространства Соболева в евклидовом пространстве. Классические неравенства Соболева.
4. Полугруппы. Модельные примеры (евклидово пространство, сфера, гиперболическое пространство, полугруппа Орнштейна-Уленбека).
5. Гауссовы меры. Неравенство Судакова-Цирельсона. Классы Соболева в пространстве с гауссовой мерой. Гауссова концентрация.
6. Логарифмически вогнутые меры. Теорема Прекопы-Ляйндлера.
7. Многообразия с мерой. Тензор Риччи и условие “кривизна-размерность”. Формула Бохнера, гамма-2 исчисление (gamma-2 calculus). Модельные примеры.
8. Неравенство Пуанкаре. Примеры и базовые свойства. Неравенство Браскампа-Либа.
9. Логарифмическое неравенство Соболева. Неравенства Соболева на многообразиях.
10. Транспортные неравенства.
11. Изопериметрические неравенства и концентрация мер.
12. Приложения и открытые проблемы выпуклого анализа (KLS, гипотеза о гиперплоскости, логарифмическое неравенство Брунна-Минковского).

Литература

- [1] Bakry D., Gentil I., Ledoux M., Analysis and geometry of Markov diffusion operators. Springer-Verlag. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 348, 2014.
- [2] Adams R.A, Fournier J.J., Sobolev spaces. AMS. 2003.
- [3] Богачев В.И., Гауссовские меры. Наука. М. 1997.
- [4] Villani C., Topics in optimal transportation. AMS. Graduate Studies in Mathematics . Vol. 58, 2003.
- [5] Artstein-Avidan S., Giannopoulos A., Milman V.D., Asymptotic geometric analysis, Part I, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 202, AMS, 2015.
- [6] Ledoux M., Concentration of measure phenomenon. AMS. Mathematical surveys and Monographs , Vol. 89, 2001.
- [7] Brazitikos S., Giannopoulos A., Valletas P., Vrisiou B.-H., Geometry of Isotropic Convex Bodies. AMS. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 196, 2014.