НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# globus ГЛОБУС

Общематематический семинар

## Зограф П.Г. Тау-функции и когомологии пространств модулей

Пётр Георгиевич Зограф, 27 февраля 2014

Я хочу рассказать о том, как объект, который возникает в теории дифференциальных уравнений, а именно тау-функция, находит применение в алгебраической геометрии для нахождения соотношений между классами когомологий. В математике термин *тау-функция* применяется ко многим объектам. Самая знаменитая тау-функция — это тау-функция Рамануджана. Эта функция принимает значения на натуральных числах, и представляет собой коэффициенты знаменитой модулярной формы — модулярного дискриминанта. В теории интегрируемых систем тау-функциями называют, в частности, решения интегрируемых иерархий. Я же буду иметь дело с так называемыми изомонодромными тау-функциями, которые связаны с изомонодромными деформациями систем линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений на комплексной плоскости: $\frac{dw}{dz} = A(z)w$, где $w$ — вектор в $n$-мерном пространстве, $A$ — квадратная матрица порядка $n$. Будем считать, что эта система фуксова, т.е. сингулярности матрицы $A$ — простые полюсы: $A(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z-z_i}$, где $z_i$ — особые точки, $A_i$ — постоянные матрицы. Кроме того, будем считать, что уравнение регулярно на бесконечности, т.е. $\sum_{i=1}^{n} A_i = 0$.

Это уравнение можно переписать как уравнение на фундаментальную систему решений: $\frac{d\Psi}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z-z_i}\Psi$, где $\Psi$ — матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения; мы будем предполагать, что $\Psi(\infty) = I$ — единичная матрица.

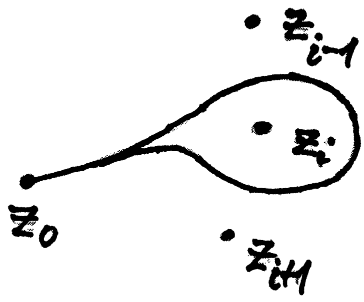


Рис. 1.

Монодромия определяется следующим образом. Мы решаем эту систему локально, а потом продолжаем решение вокруг особой точки $z_i$ (рис. 1). И когда мы возвращаемся в начальную точку, матрица $\Psi$ домножается справа на некоторую матрицу $M_i$, не зависящую от $z$: $\Psi \rightsquigarrow \Psi M_i$. Матрица $M_i$ называется матрицей монодромии вокруг точки $z_i$. Матрицы монодромии задают представление фундаментальной группы плоскости с $n$ проколотыми точками $z_i$ в линейную группу:

$$M\colon \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}, z_0) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Нас интересует такая задача: мы хотим двигать особые точки уравнения и одновременно менять коэффициенты $A_i$ так, чтобы монодромия при этом не менялась, а оставалась постоянной. Эта задача об изомонодромных преобразованиях тесно связана с 21-й проблемой Гильберта. В 21-й проблеме Гильберт поставил такой вопрос. Пусть заданы особые точки и монодромия вокруг этих точек. Требуется доказать, что всегда найдётся решение с такой монодромией и фуксовыми особенностями в этих точках. Гильберт сформулировал свои проблемы в 1900 году, а уже в 1908 году появилась статья Племеля, где он будто бы доказал эту гипотезу. В течение долгих лет считалось, что это правильное доказательство, все были довольны, и к этой задаче больше никто не возвращался. Тем не менее, в 70-е годы, когда начался солитонный бум, обнаружилось, что 21-я проблема Гильберта (и, более общо, проблема Римана–Гильберта) естественно возникает в так называемом методе обратной задачи, с помощью которого можно интегрировать нелинейные уравнения. И тогда стали появляться сомнения по поводу справедливости доказательства Племеля. В эту деятельность существенный вклад внесли математики московской школы, Ю.С.Ильяшенко и А.А.Болибрух. Ю.С.Ильяшенко обнаружил, что в действительности Племель доказал лишь то, что фуксовость может выполняться во всех точках, за исключением одной, т.е. что можно найти такой потенциал и такое дифференциальное уравнение, которое будет фуксовым во всех точках, кроме одной, и монодромия будет такая, как требуется. Кроме того, он заметил, что если хотя бы одна из матриц монодромии диагонализируется, то доказательство Племеля проходит; а в общем случае оно не проходит. Затем А.А.Болибрух нашёл контрпример к 21-й проблеме Гильберта.

Я продолжу рассказ об изомонодромных преобразованиях. Есть разные постановки задачи Римана–Гильберта. Нужно правильным образом ставить эту задачу. Хотелось бы иметь такую постановку, чтобы решение существовало и было единственным, но такое невозможно. Один из естественных способов постановки задачи — фиксировать не только монодромию, но и главные части $\Psi$ в особых точках. Условие на постоянство матриц монодромии можно записать как дифференциальное уравнение на $\Psi$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z_i} + \frac{A_i}{z - z_i}\Psi = 0 \qquad (1)$$

(условие изомонодромности). Эта система уравнений не всегда имеет решение, она должна быть совместна. И нетрудно вывести условие совместности. Это условие носит название *систе-*

*ма Шлезингера.* Шлезингер первым его выписал. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_j} = \begin{cases} \frac{[A_i,A_j]}{z_i-z_j} & \text{при } i \neq j; \\ -\sum_{k\neq i} \frac{[A_i,A_k]}{z_i-z_k} & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Выражаясь современным языком, это означает, что связность, задаваемая уравнением (1), – плоская.

Тау-функция определяется как решение следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial \log \tau}{\partial z_i} = \sum_{j<i} \frac{\operatorname{tr}(A_i A_j)}{z_i - z_j}.$$

Она была введена, видимо, японскими математическими физиками (Jimbo, Miwa и др.). Геометрический смысл тау-функции обнаружил Мальгранж. Он заметил, что зануление тау-функции означает неразрешимость задачи Римана–Гильберта. Дивизор тау-функции говорит о том, при каких значениях $z_i$ и $A_i$ соответствующая задача Римана–Гильберта разрешима. То есть критерий неразрешимости задачи Римана–Гильберта такой: $\{\tau = 0\}$ (при этом мы игнорируем “тривиальные” нули $\tau$ на диагоналях $\{z_i = z_j\}$).

Самый простой пример тау-функции получается, когда $A(z)$ — скалярная функция, а все $A_i$ — единицы. Тогда тау-функция — это определитель Вандермонда. Кроме как на диагоналях $\{z_i = z_j\}$, он нигде больше в нуль не обращается. Поэтому задача Римана–Гильберта в этом случае всегда разрешима (что и так очевидно).

Как я уже сказал, интерес к изомонодромным деформациям вернулся благодаря солитонному буму. Но тау-функции появляются не только в связи с интегрированием нелинейных уравнений. Та тау-функция, о которой я буду сегодня рассказывать, возникла в несколько иной задаче. Эта задача была решена Б.А.Дубровиным; она состоит в построении фробениусовой структуры на пространстве мероморфных функций на римановых поверхностях. Фробениусова структура, или фробениусово многообразие, — это некий подход к тому, что называется квантовыми когомологиями, или решением уравнения ассоциативности — уравнения Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (WDVV). Если говорить грубо, то фробениусово многообразие — это многообразие (вещественное или комплексное) с плоской метрикой $\langle\ ,\ \rangle$. Метрика билинейна, т.е. это невырожденная форма в касательном расслоении. При этом в каждом слое касательного расслоения есть структура фробениусовой алгебры, т.е. коммутативной ассоциативной алгебры, умножение в которой согласовано со скалярным произведением: $\langle XY, Z\rangle = \langle X, YZ\rangle$; это главное свойство, которое определяет фробениусову алгебру. (Пример фробениусовой алгебры даёт кольцо когомологий гладкого компактного многообразия, где умножение — это обычное $\smile$-произведение, а метрика определяется формой двойственности Пуанкаре.)

Существование фробениусовой структуры связано с решением уравнения ассоциативности, которое я пока ещё не выписал. А решение этого уравнения — совсем нетривиальная вещь. Например, на касательном пространстве к $\mathbb{R}^n$ в точке 0 можно задать структуру фробениусовой алгебры, а дальше её тривиально разнести по всему $\mathbb{R}^n$. Но это не интересный пример. Интересные примеры возникают в теории инвариантов Громова–Виттена.

Условие фробениусовости эквивалентно существованию так называемого препотенциала. Препотенциал — это гладкая функция $F$ со следующим специальным свойством. Данной плоской метрике каноническим образом соответствует связность Леви–Чивита $\nabla$. С помощью этой плоской связности ковариантно продифференцируем $F$ три раза по $X$, $Y$ и $Z$; это должно быть равно $\langle XY, Z\rangle$, т.е. $\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z F = \langle XY, Z\rangle$. Если мы введём плоские координаты на многообразии, то третьи производные потенциала дадут структурные константы, которые будут определять умножение в этой алгебре. Коммутативность алгебры очевидна, а ассоциативность имеет место далеко не всегда. Для того чтобы умножение, задаваемое третьими производными функции $F$, было ассоциативно, нужно, чтобы выполнялось уравнение ассоциативности (уравнение Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде, или WDVV)

$$F_{ijm}g^{mn}F_{kln} = F_{ilm}g^{mn}F_{jkn}.$$

Мы предполагаем, что выбраны некие плоские координаты (плоскость координат означает, что метрика в этих координатах постоянна); $F_i$ обозначает производную по соответствующей координате; $g^{mn}$ — тензор, обратный к метрическому.

Умножение мы можем определить следующим образом: $e_ie_j = F_{ijk}g^{kl}e_l$; мы разложили произведение базисных векторов по тем же самым базисным векторам. Утверждение такое: если выполняется уравнение ассоциативности, то определённое таким образом умножение ассоциативно.

Самый знаменитый пример — квантовые когомологии. Квантовые когомологии — это деформация обычных когомологий. Возьмём какое-нибудь комплексное алгебраическое многообразие $V$ и рассмотрим его когомологии. В качестве метрики на этом пространстве возьмём форму двойственности Пуанкаре $\langle\ ,\ \rangle$. Умножение в когомологиях — это обычное $\smile$-произведение. А в качестве $F$, с помощью которого оно будет деформироваться, нужно взять потенциал Громова–Виттена. Он строится из инвариантов Громова–Виттена. Инварианты Громова–Виттена связаны с пространством модулей стабильных отображений. Пусть $\beta$ — двумерный класс гомологий пространства $V$. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta)$ стабильных отображений рода $g$ с $n$ отмеченными точками — это множество допустимых отображений комплексных кривых (римановых поверхностей) в $V$, реализующих класс гомологий $\beta$. С этим пространством связаны $n$ его отображений в $V$, устроенных следующим образом. Точка пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta)$ — это кривая $C$ с отмеченными точками $x_1, \ldots, x_n$, отображаемая в $V$ посредством некоторого $\rho$. В качестве $i$-го отображения мы берём значение $\rho(x_i)$ и получаем отображение $\rho_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta) \to V$. Затем для классов когомологий в $V$ мы берём их прообразы относительно $\rho_i$ и получаем классы когомологий в $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta)$. Дальше мы можем их перемножать в любом количестве, вычислять эти произведения на фундаментальном цикле и получать некие числа. Эти числа называются инвариантами Громова–Виттена. И если мы составим производящую функцию инвариантов Громова–Виттена, то она как раз и будет препотенциалом: она будет удовлетворять уравнению ассоциативности.

Дубровин хотел обобщить и формализовать эту довольно сложную конструкцию. Пример фробениусова многообразия, о котором я хочу сегодня рассказать, — это пространство мероморфных функций фиксированного рода и степени. Фробениусова структура на этом пространстве была построена Дубровиным именно с помощью изомонодромной задачи. Обозначим через $\tilde{\mathcal{H}}_{d,g}$ пространство мероморфных функций $f$ рода $g$ (это означает, что они заданы на кривой рода $g$) степени $d$ общего вида (здесь это означает, что все полюсы $f$ простые, т.е. $|f^{-1}(\infty)| = d$, и все критические значения тоже простые, т.е. ветвление над критическим значением имеет вид $[1^{d-2}2]$ — в прообразе каждого критического значения $d-2$ простые точки и одна критическая точка порядка 2; это условие общего положения). Такие функции образуют гладкое комплексное многообразие размерности $n = 2d + 2g - 2$, которое часто называют пространством Гурвица. Дубровин построил фробениусову структуру на пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{d,g}$. Он свёл проблему решения уравнения ассоциативности к решению некой изомонодромной задачи. Он явно описал матрицы $A_i$ для соответствующей изомонодромной задачи, решение которой давало искомую плоскую метрику.

Во второй части доклада я буду говорить о том, как тау-функцию, соответствующую изомонодромной задаче Дубровина, можно применить к изучению соотношений в группе Пикара компактифицированного пространства Гурвица. Сначала я непосредственно опишу изомонодромную тау-функцию Дубровина. Для этого мне понадобятся дополнительные понятия. Наряду с пространством мероморфных функций определим ещё конфигурационное пространство критических значений $\mathcal{Z}_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j\}$. У нас есть комплексно аналитическое отображение $\tilde{\mathcal{H}}_{d,g} \to \mathcal{Z}_n$ (каждой мероморфной функции мы сопоставляем её набор критических значений; критические точки при этом занумерованы и в прообразе каждой критической точки есть ровно одно критическое значение). Это отображение является накрытием; координаты критических значений играют роль локальных координат на пространстве Гурвица $\tilde{\mathcal{H}}_{d,g}$. Это отображение называется морфизмом ветвления, а среди последователей школы Арнольда оно называется отображением Ляшко–Лойенги.

Давайте зафиксируем симплектический базис $\alpha = \{a_i, b_j\} \subset H_1(C)$. Слово “симплектический” означает, что циклы $a_i$ между собой не пересекаются, циклы $b_i$ тоже сами с собой не пересекаются, а нетривиальные пересечения есть только у $a_i$ с $b_i$. Тогда можно определить бидифференциал Бергмана $B(x, y)$ на $C \times C$. Он однозначно характеризуется следующими свойствами: (1) он симметрический; (2) у него полюс второго порядка на диагонали (при $x = y$) с бивычетом 1; (3) $\int_{a_i} B(x,y)dx \equiv 0$. Вблизи диагонали такой дифференциал в локальных координатах можно записать в виде

$$B(x,y)dx\,dy = \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{6}S_B(x) + O(x-y)\right)dx\,dy,\ x \to y.$$

Здесь $S_B$ — это проективная связность, которая при замене координат $w = w(z)$ преобразуется следующим образом:

$$S_B^{(w)} w'^2 + S_w = S_B^{(z)},$$

где $w'$ — производная по $z$, а

$$S_w = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

— производная Шварца. (Если бы не было слагаемого, соответствующего производной Шварца от $w = w(z)$, то это был бы обычный квадратичный дифференциал.) Другими словами, проективная связность описывает инвариантно определённый потенциал уравнения Фукса на римановой поверхности: $y'' + \frac{1}{4}Sy = 0$.

С помощью проективной связности можно (локально) определить связность Бергмана $d_B$ в тривиальном линейном расслоении на пространстве Гурвица $\tilde{\mathcal{H}}_{d,g}$:

$$d_B = d + 4\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname*{Res}_{x_i}\frac{S_B - S_f}{df}\right)dz_i;$$

здесь $f$ — мероморфная функция на кривой $C$, $x_i$ — её критические точки. Разность $S_B - S_f$ — квадратичный дифференциал; мы делим его на дифференциал мероморфной функции $f$ и получаем мероморфный дифференциал, у которого корректно определён вычет. Эта связность зависит не только от кривой и мероморфной функции — она ещё зависит и от выбора базиса гомологий $\alpha$ на $C$.

Наконец мы дошли до определения тау-функции. Это по определению ковариантно постоянное сечение тривиального линейного расслоения: $d_B\tau = 0$. Локально эта функция определена на пространстве Гурвица, а глобально она не является однозначной, но её можно интерпретировать как сечение голоморфного расслоения на $\tilde{\mathcal{H}}_{d,g}$. Я определил её в терминах кривой $C$, но её можно определить и на сфере Римана с $n$ отмеченными точками, как это делал Дубровин, тогда она лучше вписывается в теорию изомонодромных деформаций. Итак, тау-функция $\tau = \tau(C, \alpha, f)$ зависит от кривой $C$, от выбора базиса $\alpha$ и от мероморфной функции $f$. Мы хотим изучить, как она преобразуется при замене симплектического базиса и при дробно-линейных преобразованиях функции $f$.

Мне ещё понадобится определение так называемого линейного расслоения Ходжа. Рассмотрим $g$-мерное расслоение $E_g \to \mathcal{M}_g$ над пространством модулей кривых рода $g$; слой расслоения над кривой $C$ — это пространство $\Omega^1_C$ голоморфных 1-форм на кривой $C$. Можно рассмотреть детерминант этого расслоения (максимальную внешнюю степень): $\lambda = \det E_g = \Lambda^g E_g$. Это и есть линейное расслоение Ходжа. Это расслоение можно поднять на пространство Гурвица $\mathcal{H}_{d,g}$. Пространство $\mathcal{H}_{d,g}$ — это пространство пар вида $(C, f)$, где мероморфные функции рассматриваются с точностью до дробно-линейной эквивалентности, т.е. $\mathcal{H}_{d,g} = \tilde{\mathcal{H}}_{d,g}/PSL(2,\mathbb{C})$. Давайте забудем про мероморфную функцию, тогда получим отображение забывания $\pi\colon \mathcal{H}_{d,g} \to \mathcal{M}_g$. С помощью отображения $\pi$ линейное расслоение Ходжа $\lambda$ можно перетащить на $\mathcal{H}_{d,g}$ и получить расслоение $\pi^*\lambda$, которое будем для простоты обозначать тем же символом $\lambda$.

Ещё нам понадобится определитель Вандермонда $V = \prod_{i<j}(z_i - z_j)$ критических значений функции $f$.

Оказывается, что если посмотреть, как меняется тау-функция $\tau(C, \alpha, f)$ при замене симплектического базиса $\alpha$ и при дробно-линейном преобразовании функции $f$, то получается следующая лемма.

Лемма. $\eta = \tau^{n-1}V^{-6}$ — *это нигде не обращающееся в нуль голоморфное сечение линейного расслоения* $\lambda^{24(n-1)}$.

Шестая степень определителя Вандермонда преобразуется при дробно-линейных преобразованиях так же, как и $(n-1)$-ая степень тау-функции. Поэтому произведение $\tau^{n-1}V^{-6}$ инвариантно относительно дробно-линейных преобразований. А при замене базиса $\alpha$ тау-функция преобразуется так же, как $\lambda^{24}$.

Теперь нам нужно компактифицировать пространства Гурвица. Это делается с помощью так называемых допустимых накрытий. До этого мы рассматривали накрытия сферы Римана гладкими кривыми. Теперь давайте несколько расширим класс накрытий, которые мы рассматриваем, и будем рассматривать накрытия над кривыми, которые могут иметь двойные точки. Нас будет интересовать только случай, когда сфера Римана распадается на две рациональные кривые, пересекающиеся по одной точке. Допустимое накрытие — это накрытие кривой с двойными точками, при этом двойные точки отображаются в двойные точки (рис. 2), критические точки расположены на дополнениях к двойным точкам, и для каждой точки, лежащей над двойной точкой, индекс ветвления должен быть одинаковым для обеих ветвей. Допустимое накрытие, изображённое на рис. 2, — это симметрия относительно прямой $l$; род $g$ накрывающей кривой равен 1, $n = 4$ и $d = 2$, а для каждой из ветвей, лежащих над двойной точкой, индекс ветвления равен

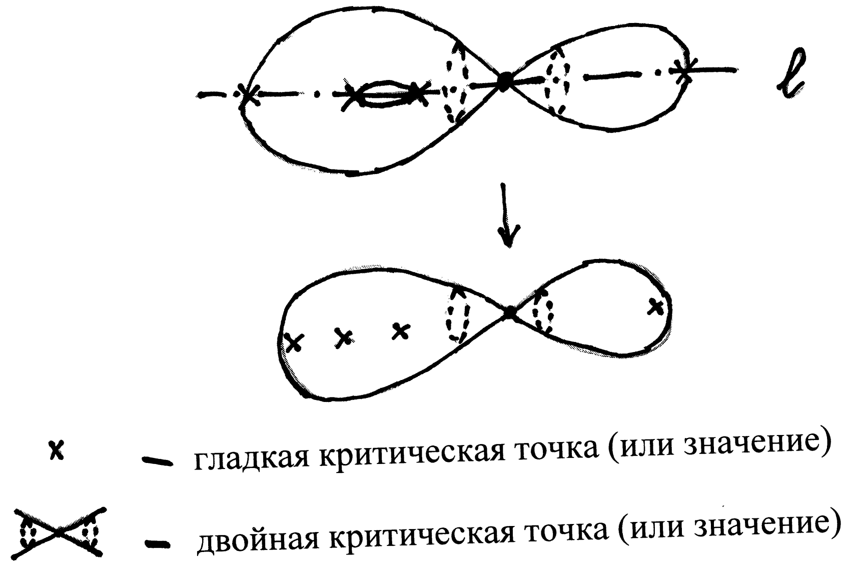


Рис. 2.

2.

В общем случае ситуация схожая. Критические значения распределяются по двум компонентам этой приводимой кривой разными способами. Будем считать, что слева $k$ критических значений, а справа $n-k$ критических значений. Над двойной точкой лежит $r$ точек накрытия с индексами ветвления $m_1, \ldots, m_r$ (рис. 3).

Очевидно, что $\sum m_i = d$ (степень отображения), т.е. числа $m_1, \ldots, m_r$ задают разбиение числа $d$. Это разбиение будем обозначать через $\mu = [m_1, \ldots, m_r]$. При фиксированных $k$ и $\mu$ множество таких допустимых накрытий образует многообразие (точнее говоря, комплексное пространство), размерность которого на 1 меньше размерности пространства Гурвица. Это пространство мы будем обозначать через $\Delta_\mu^{(k)}$. Оказывается, что если к пространству Гурвица $\mathcal{H}_{d,g}$ мы добавим все такие пространства $\Delta_\mu^{(k)}$, т.е. рассмотрим $\mathcal{H}_{d,g} \bigcup_{\mu \vdash d} \bigcup_{k=2}^{d/2} \Delta_\mu^{(k)}$, то получим компактное (хотя и особое) алгебраическое многообразие $\overline{\mathcal{H}}_{d,g}$. Это многообразие легко десингуляризовать и сделать

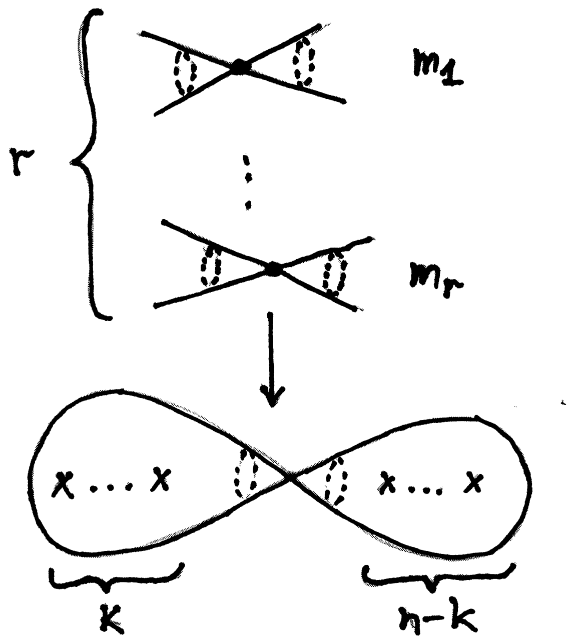


Рис. 3.

из него гладкое комплексное многообразие. Сингулярности появляются за счёт действия циклических групп на ветвлениях с индексами $m_1, \ldots, m_r$. Если мы посмотрим, как устроено это пространство в направлении, трансверсальном дивизору $\Delta_\mu^{(k)}$, то оно будет выглядеть как окрестность нуля кривой $\zeta_1^{m_1} = \zeta_2^{m_2} = \cdots = \zeta_r^{m_r}$. Эту особенность легко разрешить. Многообразие имеет самопересечения, которые легко можно развести.

Есть компактное многообразие $\overline{\mathcal{H}}_{d,g}$, и на его открытой части живёт голоморфное сечение $\eta$, не обращающееся в нуль. Мы хотим посмотреть, как оно себя ведёт на дивизоре компактификации. Это можно сделать, изучая асимптотики. Нужно выяснить, где сечение $\eta$ зануляется, где обращается в бесконечность, и посчитать кратности. Это было сделано в нашей совместной работе с А.Кокотовым и Д.Короткиным. Мы получили следующую формулу:

$$[\lambda] = \sum_{k=2}^{n/2} \sum_{\mu \vdash d} \left( \prod_{i=1}^{r} m_i \right) \left( \frac{k(n-k)}{8(n-1)} - \frac{1}{12} \left( d - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i} \right) \right) \left[ \Delta_{\mu}^{(k)} \right].$$

Здесь $[\lambda]$ — класс расслоения Ходжа (его можно понимать как двумерный класс когомологий). Это равенство верно и в группе Пикара (первой группе Чжоу — в группе алгебраических циклов коразмерности 1). Это уже чистая алгебраическая геометрия.

Эта формула до нашего доказательства не была известна. Были известны лишь некоторые её специальные случаи. Например, эта формула была известна для гиперэллиптических кривых, но это очень специальный случай. Похожую задачу в случае $g = 0$ рассматривали С.Ландо и Д.Звонкин, и наши результаты согласуются. После того как мы вывели эту формулу, van der Geer и Kouvidakis нашли её чисто алгеброгеометрическое доказательство с помощью теоремы Гротендика–Римана–Роха и использовали её для ответа на старый вопрос Харриса–Мамфорда (Harris–Mumford) о классах дивизоров Гурвица на пространствах модулей кривых.

Используя эту же аналитическую технику, можно вывести похожие соотношения в группах Пикара пространств модулей голоморфных дифференциалов, не только абелевых, но и квадратичных и любого порядка. Для пространств модулей абелевых и квадратичных дифференциалов эти формулы представляют интерес и с точки зрения комплексной динамики. Эти пространства появляются там в связи с изучением плоских рациональных биллиардов и потока Тейхмюллера.

Описанный в докладе подход с использованием тау-функций применим и для других задач. Например, с его помощью можно изучать соотношения в группах Пикара пространств модулей спинорных кривых и т.п.