

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# globus ГЛОБУС

Общематематический семинар

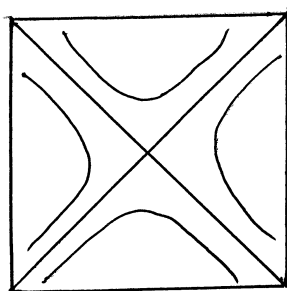


Рис. 1.

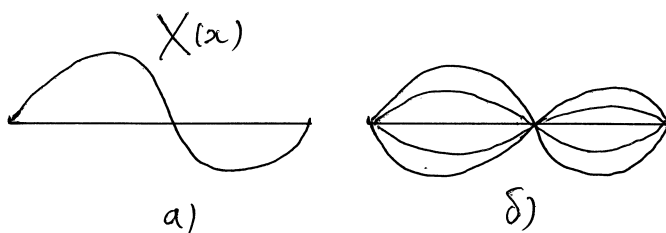


Рис. 2.

## Пенской А.В. Спектральная геометрия: слышать форму, видеть звук

Пенской Алексей Викторович, 23 мая 2013.

Эрнст Хладни (1756–1827) делал следующий опыт. Он брал квадратную пластинку, закреплённую в одной точке, посыпал её песком и проводил по её краю смычком. Пластинка вибрировала, и оказывалось, что песчинки собирались в красивые линии (рис. 1). Чем выше частота, тем на большее число частей эти линии разбивают пластинку.

Я начну с волнового уравнения  $u_{tt} = \Delta u$ . Здесь  $u = u(t, x)$  — функция двух переменных,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ . У этого уравнения есть решения — стоячие волны  $u = T(t)X(x)$ . Почему это называется стоячие волны, легко понять, если посмотреть, как это решение себя ведёт. Есть функция  $X(x)$  (рис. 2, а); она умножается на функцию, зависящую от времени. Когда меняется время, амплитуда меняется, но форма остаётся той же самой (рис. 2, б).

Подставим  $u = T(t)X(x)$  в волновое уравнение:  $T''X = T\Delta X$ , т.е.  $\frac{T''}{T} = \frac{\Delta X}{X}$ . Левая часть не зависит от  $x$ , а правая часть не зависит от  $t$ . Это означает, что это выражение — некоторая константа:  $\frac{T''}{T} = \frac{\Delta X}{X} = -\lambda$ . Откуда эту константу взять? Мы рассматриваем некоторую область  $\Omega$ , и нам нужно наложить некоторые граничные условия на этой области. Есть граничное условие Дирихле:  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Если всё это представлять как мембрану, то условие Дирихле означает, что край мембраны закреплён; это будет задача про барабан. И есть граничное условие Неймана:  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ .

Нас интересует такая задача:  $-\Delta X = \lambda X$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , т.е. уравнение на спектр оператора Лапласа со знаком минус и условие Дирихле. Это называется задачей Дирихле. Мы знаем, что спектр дискретный возрастающий неотрицательный:  $0 < \lambda_1(\Omega, D) \leq \lambda_2(\Omega, D) \leq \dots$  ( $D$  здесь показывает, что рассматривается задача Дирихле). Кратности всех собственных значений конечные, спектр чисто дискретный. Можно рассматривать и спектр с условием Неймана:  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ . В этом случае ситуация зависит от границы области. Если граница области хорошая, то спектр тоже будет дискретный. А если у границы есть «каспы», то может быть непрерывный спектр. Спектр здесь начинается с нуля:  $0 = \lambda_1(\Omega, N) < \lambda_2(\Omega, N) \leq \dots$

Есть собственные значения и, соответственно, есть собственные функции  $u_1, u_2, \dots$ . Спектральная геометрия изучает, как геометрия области связана со спектральными данными: собственными числами и собственными функциями. Это обобщается и на римановы многообразия. Если есть многообразие  $M$  с краем  $\partial M$  и на нём метрика, то нужно смотреть на оператор Лапласа–Бельтрами. Тра-

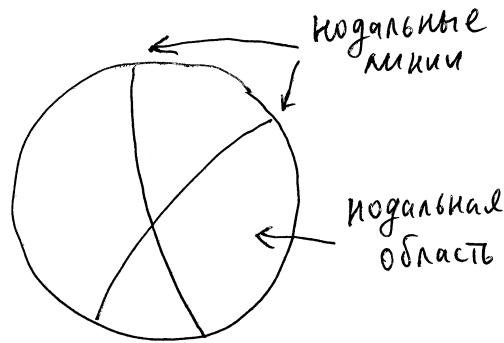


Рис. 3.

диционный оператор Лапласа определяется плохо, потому что приходится везде писать знак минус. Поэтому в римановой геометрии проще сразу определить оператор Лапласа так:  $\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ . Есть специальный случай, когда у многообразия нет края:  $\partial M = \emptyset$ . В этом случае просто решается уравнение  $\Delta X = \lambda X$ , никаких граничных условий нет. Если многообразие без края компактное, то собственные функции гладкие.

Какие здесь есть вопросы? У нас есть собственные числа и собственные функции. Собственные числа входят в уравнение  $T'' = -\lambda_i T$ . Это уравнение гармонического осциллятора. Его решения  $A \cos \sqrt{\lambda_i} t + B \sin \sqrt{\lambda_i} t$ . Это означает, что числа  $\sqrt{\lambda_i}$  связаны с частотой звука. Поэтому вопрос о том, до какой степени спектр определяет геометрию, был достаточно метко сформулирован Марком Кацем в его статье 1966 года так: «Можно ли услышать форму барабана?» Вскоре выяснилось, что ответ на этот вопрос отрицательный: Милнор построил пример двух шестнадцатимерных торов с разными решётками периодов, у которых спектр одинаковый. Тем не менее, как мы увидим далее, многие вещи можно услышать, а в некоторых случаях спектр полностью восстанавливает геометрию. Например, среди всех плоских областей диск можно однозначно выделить по его спектру. Если у некоторой плоской области спектр такой же, как у диска, то это может быть только диск.

А у собственных функций есть нодальные линии. Вспомним опыт с песчинками. Там, правда, спектр не самого оператора Лапласа, а его квадрата, но мы сейчас не будем на это обращать внимание. Песчинки хотят остаться там, где их меньше всего трясёт. А это будет там, где функция  $X$  обращается в нуль, и в малой окрестности такой точки. Песчинки скапливаются вдоль нулей собственных функций. Нули собственных функций называются нодальными линиями, а дополнения к ним — нодальными областями (рис. 3).

Обобщив вопрос Марка Каца, можно сказать, что спектральная геометрия — это наука о том, как слышать форму и видеть звук. Как слышать форму — это вопрос о том, как собственные числа определяют геометрию. А видеть звук — это то, что можно видеть нодальные линии, и их геометрия и топология тоже связаны со звуком.

Давайте обсудим вопросы, которые тут возникают. Извлечь что-то из собственных чисел по отдельности нельзя. Их нужно рассматривать в совокупности. И здесь есть две важнейшие функции, по которым что-то можно определить. Одна из них — функция Вейля, другая — след ядра теплопроводности. Функция Вейля — это количество собственных чисел, которые меньше  $\lambda$ , т.е.  $N(\lambda) = \#\{\lambda_i | \lambda_i < \lambda\}$ . Важный вопрос здесь — вопрос про асимптотику. Но даже сама постановка проблемы очень сложная. Давайте посмотрим на примеры. Ситуация такая, что если вы возьмёте произвольную область и попытаетесь найти её спектр, то сделать это аналитически вам не удастся. Тем не менее, есть области, в которых уравнение можно проинтегрировать. Обычно это области, для которых возможно разделение переменных. Например, отрезок, квадрат, прямоугольник, диск (в нём можно ввести полярные координаты).

Для отрезка длины  $l$  для задачи Дирихле  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ . Для прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  для задачи Дирихле  $\lambda_{n,m} = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}$ , где  $n, m = 1, 2, \dots$ . В частности, для квадрата со стороной  $2\pi$  получаем  $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2$ . А для тора, полученного из квадрата со стороной  $2\pi$ ,  $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2$ , где  $n$  и  $m$  уже не все натуральные, а все целые числа. Задача о вычислении функции Вейля в

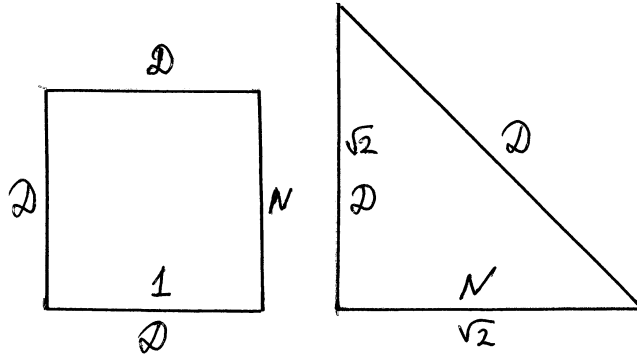


Рис. 4.

этом случае это такая задача: вы берёте окружность радиуса  $\sqrt{\lambda}$  и спрашиваете, сколько точек с целочисленными координатами окажется внутри этой окружности. Это очень старая задача теории чисел. Здесь можно дать достаточно грубую оценку, восходящую к Гауссу:  $N(\lambda) = \pi\lambda + O(\sqrt{\lambda})$ . Есть гипотеза Харди о том, что оценка ошибки на самом деле  $O(\lambda^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ , но она до сих пор не доказана. Доказана оценка ошибки  $O(\lambda^{\frac{1}{3}-\delta})$ .

**ТЕОРЕМА (Вейль, 1911).** Пусть  $M$  — многообразие (с краем или без края) размерности  $n$ . Тогда

$$N(\lambda) = \frac{\text{Vol}(M)\lambda^{n/2}}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)} + O(\lambda^{n/2}).$$

Теорема Вейля даёт главный член асимптотики функции Вейля. Из его вида следует, что если вы знаете функцию Вейля, то вы можете найти размерность многообразия и его объём. То есть вы можете услышать, по крайней мере, размерность и объём.

Ещё есть гипотеза Вейля про следующий член после  $\frac{\text{Vol}(M)\lambda^{n/2}}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ . Вейль высказал гипотезу, что следующий член равен  $\pm \frac{\text{Vol}_{n-1}(\partial M)\lambda^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sqrt{\pi})^{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$  (знак плюс для условия Неймана, а знак минус для условия Дирихле). Гипотезу Вейля легко доказать для прямоугольника. Но уже для диска или для эллипса это трудная работа.

Фундаментальный результат был доказан Иврием и Мельроузом в 1980 году. Он говорит, что гипотеза Вейля верна, по крайней мере, если множество периодических геодезических имеет меру нуль среди всех геодезических; для многообразия с краем здесь предполагается, что на границе происходит отражение геодезической, как в бильярде. С тех пор стало ясно, что спектральная геометрия связана с поведением периодических геодезических. Сейчас мы знаем только про замкнутые геодезические с тремя звеньями и недавно получены результаты про геодезические с четырьмя звеньями.

В зависимости от геометрии области может происходить падение порядка остаточного члена. Это очень интересный момент, потому что интегрируемость геодезических потоков — это вопрос ещё из 19 века, и интересно, что это оказалось связано.

Рассмотрим функцию  $\sum_i e^{-\lambda_i t}$ , которая называется следом ядра теплопроводности. Из неё тоже можно многое узнать про геометрию. Например, в размерности 2

$$\sum_i e^{-\lambda_i t} = \frac{\text{Area } \Omega}{4\pi t} - \frac{l(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{\chi(\Omega)}{12} + \dots,$$

где  $l(\partial\Omega)$  — периметр  $\Omega$ . В частности, по этой функции можно узнать эйлерову характеристику  $\chi(\Omega)$ . Это гипотеза Каца, которую доказали МакКин и Зингер в 1967 году.

Все примеры, когда спектр одинаковый, а геометрия разная, очень сложные. Но есть такая возможность: смешанная граничная задача, когда граница состоит из нескольких кусков, и на разных кусках граничные условия разные: на одних условия Дирихле, а на других — условия Неймана.

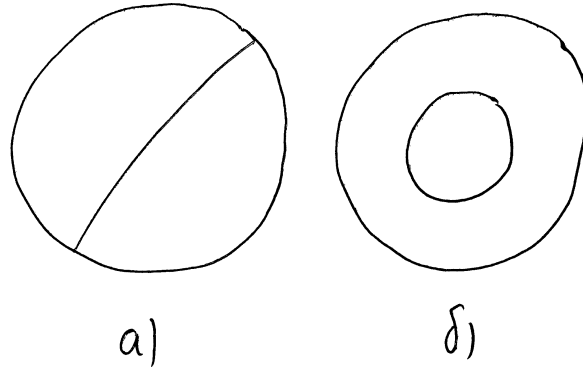


Рис. 5.

Тогда пример строится просто. Например, если взять квадрат со стороной 1, на трёх сторонах которого условие Дирихле, а на одной условие Неймана, и взять равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом  $\sqrt{2}$ , на гипотенузе и одном катете которого условие Дирихле, а на другом катете условие Неймана (рис. 4), то спектр у них одинаковый.

Теперь я хочу немного поговорить про нодальную геометрию и топологию. Рассмотрим сначала отрезок длины  $\pi$ . Для него собственные функции — это функции  $\sin nx$ . У функции  $\sin x$  нулей внутри отрезка нет, т.е. нодальная область одна. А у функции  $\sin 2x$  есть один нуль, поэтому нодальных областей две; у функции  $\sin 3x$  нодальных областей три и т.д.: у  $n$ -й собственной функции будет  $n$  нодальных областей. А как обстоит дело в общем случае? На этот счёт есть фундаментальная теорема Куранта (1923) о том, что у собственной функции  $\varphi_n$  с номером  $n$  нодальных областей не более  $n$ . Это верно и для условий Неймана, и для условий Дирихле. Первое следствие из этой теоремы: у первой собственной функции  $\varphi_1$  нет нулей (для задачи Неймана это очевидно, потому что первая собственная функция — константа, а для задачи Дирихле это факт содержательный).

Рассмотрим теперь ограничение собственной функции  $\varphi_n$  на какую-то её нодальную область  $\Omega_1$ . У неё там нулей нет, а любая собственная функция, кроме первой, должна иметь нуль. Это означает, что  $\varphi_n|_{\Omega_1}$  — первая собственная функция в области  $\Omega_1$ .

У  $\varphi_2$  ровно две нодальных области. Действительно, нодальных областей не больше двух. С другой стороны, собственные функции самосопряжённого оператора всегда ортогональны, поэтому  $\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 d\mu = 0$ . Но функция  $\varphi_1$  не меняет знак, поэтому если  $\varphi_2$  тоже не меняет знак, то получаем противоречие.

Теорема Куранта — очень мощное средство исследований в нодальной геометрии, с очень далеко идущими приложениями.

Для плоских областей есть теорема Плейеля (1956): число тех  $\lambda_i$ , для которых у  $\varphi_i$  ровно  $i$  нодальных областей, конечно. Здесь есть интересный вопрос: а сколько их? Известно, что если  $\nu(n)$  — количество нодальных областей у  $n$ -й собственной функции, то  $\limsup \frac{\nu(n)}{n} \leq C \approx 0,681$ . Вопрос о количестве нодальных областей очень сложный, и он открытый.

Возьмём теперь  $\varphi_2$ ; у неё есть ровно две нодальные области. Чисто теоретически они могут быть устроены двумя способами: рис. 5 а) и б), т.е. либо ни одна из них не лежит внутри другой, либо одна лежит внутри другой. Есть гипотеза Пэйна, что второй случай невозможен, т.е. ни одна из нодальных областей не лежит внутри другой. Эта гипотеза доказана для выпуклой области и условия Дирихле. А для неодносвязной области и условия Дирихле есть контрпример. Для условия Неймана гипотеза доказана.

Это топологические вопросы. А есть и метрические вопросы. Например, для каждой области можно рассмотреть инрадиус — максимальный радиус диска, который можно вписать в эту область. Оказывается, что для плоских нодальных областей инрадиус жёстко ограничен: он не может быть ни слишком большим, ни слишком маленьким (Мангуби, 2005):  $\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}} \leq r_{\lambda} \leq \frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}$ . Поэтому нодальные области обычно устроены примерно так, как на рис. 6: они наматываются друг на друга; ширина полоски не может быть больше, чем инрадиус, а он — ограниченная величина.

Геометрия и топология нодальных областей — это весьма сложная вещь.

Теперь я расскажу о геометрической оптимизации собственных значений. Мы начнём с очень

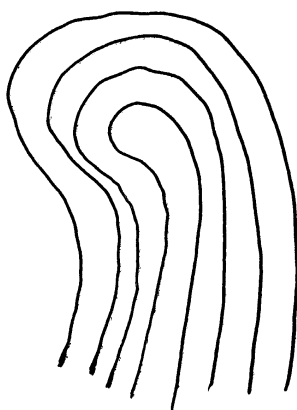


Рис. 6.

простого примера. Давайте возьмём собственные числа для прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ . Как я уже говорил, в этом случае  $\lambda_{n,m} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}$ , где  $n, m = 1, 2, \dots$ . Эти собственные числа мы должны упорядочить по возрастанию и занумеровать их в таком порядке. Ясно, что  $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$  ( $n$  и  $m$  должны быть самыми маленькими). Ясно, что  $\inf_{a,b} \lambda_1 = 0$ : числа  $a$  и  $b$  можно устремить к бесконечности. Это и понятно: звук очень большого барабана очень низкий. Наложим теперь условие: площадь прямоугольника равна 1, т.е.  $ab = 1$ . При таком условии  $\inf_a \lambda_1 = \inf_a \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2 a^2}{1} \right) = 2\pi^2$ . Инфимум достигается, когда  $a = 1$ , т.е. для квадрата. Это простейший пример геометрической оптимизации собственных чисел: из всех прямоугольных барабанов одной и той же площади самый низкий звук будет у того барабана, мембрана которого — квадрат.

Этот вопрос можно обобщить. Рассмотрим все плоские области  $\Omega$  площади 1. Для какой области число  $\lambda_1$  будет минимальным (для задачи Дирихле)? Теорема Фабера и Крана (для областей в пространстве любой размерности) утверждает, что первое собственное число минимизируется шаром. А какая область минимизирует  $\lambda_2$ ? По теореме Крана минимизирующая область — два одинаковых шара, касающихся в одной точке. (Это, конечно, не область; имеется в виду, что нужно взять последовательность областей, сходящуюся к двум касающимся шарам.) Вопрос про  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ , и т.д. открыт; про минимизирующие их области мы ничего не знаем даже для плоских областей. Есть численные результаты; фигуры там получаются странные. Известно, что по крайней мере для некоторых  $n$  собственное число  $\lambda_n$  не оптимизируется на объединении дисков.

Для римановых многообразий вопрос нужно ставить по-другому. Рассмотрим простейший случай, когда многообразие  $M$  компактно и без края. На многообразии  $M$  можно брать разные метрики  $g$ , каждой метрике  $g$  соответствует лапласиан  $\Delta_g$ , и у лапласиана есть собственные числа, которые зависят от метрики:  $0 = \lambda_0(g) < \lambda_1(g) < \dots$ . И если в предыдущем случае собственные числа нужно было минимизировать (максимум там был плюс бесконечность), то теперь, когда границы нет (и в случае Неймана тоже), их нужно максимизировать, т.е. искать  $\sup_g \lambda_i(g)$ . Только нужно учесть, что здесь есть масштабирование собственных чисел. Дело в том, что  $\lambda_i(tg) = \frac{1}{t} \lambda_i(g)$ . Поэтому нужно добавить требование  $\text{Area}(M, g) = 1$ , т.е. площадь равна 1 (или объём равен 1). В размерности 2 супремум  $\sup_g \lambda_i(g)$  всегда ограничен. А если размерность больше 2, то этот супремум не ограничен. Там нужно рассматривать супремум в классе всех метрик, конформно эквивалентных данной метрике:  $\sup_{g=fg_0} \lambda_i(g)$

Этот вопрос чрезвычайно сложный, и мы знаем очень мало ответов. Для сферы  $S^2$  максимальная метрика для  $\lambda_1(S^2)$  — каноническая; это не удивительно. Потом был результат, что для  $\lambda_1(\mathbb{R}P^2)$  метрика тоже каноническая. Для тора  $T^2$  максимальная метрика для  $\lambda_1(T^2)$  — это та, для которой тор равносторонний, т.е. параллелограмм решётки состоит из двух равносторонних треугольников. Потом мы узнали про второе собственное число для сферы  $\lambda_2(S^2)$ ; это результат Надирашвили. Оказалось, что это — две сферы, касающиеся в одной точке. Тут уже получается метрика с особенностью. Ужасы начались, когда поняли про бутылку Клейна. Это — биполярная поверхность Лоусона  $\tilde{\tau}_{3,1}$ . По-видимому, никаких других ответов пока нет. Есть некоторая

гипотеза для поверхности рода 2.

Эти результаты были получены через большие интервалы времени, но не из-за отсутствия интереса, а из-за сложности задачи. Для каждого из результатов понадобилась какая-то новая техника.

Как мы обычно ищем максимумы или минимумы? Сначала мы ищем экстремумы, а потом уже разбираемся, максимум это или минимум. Здесь тоже хочется вместо максимальных метрик попробовать искать экстремальные метрики. Здесь есть некоторая тонкость. Ситуация следующая. Функционал  $g \mapsto \lambda_i(g)$  непрерывный, но не дифференцируемый. У этого есть аналитическая причина и есть очень простая причина. Аналитическую причину я объяснять не буду, а простую объясню. Пусть у вас есть матрица  $A$  порядка 2, и вы берёте её собственные значения  $\lambda_1(A)$ ,  $\lambda_2(A)$ . Возьмём простейший случай:  $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$ . Собственные значения упорядочиваются, поэтому  $\lambda_1(A) = -|t|$  и  $\lambda_2(A) = |t|$ . Когда вы упорядочиваете собственное значение и проходите через кратность, дифференцируемость нарушается. Но доказано, что если деформация метрики аналитическая, то существуют пределы справа  $\frac{d}{dt_+} \lambda_i(g_t)$  и слева  $\frac{d}{dt_-} \lambda_i(g_t)$ . Метрика экстремальная, если эти две производные разного знака (или одна из них равна нулю); это определение экстремальной метрики. Оказалось, что с экстремальными метриками, вроде бы, чуть-чуть проще. Обычно экстремальные задачи в дифференциальной геометрии приводят к уравнениям математической физики. Здесь это тоже так.

Напомню, что такое минимальная поверхность. Геодезическую можно определять так: если на кривой взять две точки, зафиксировать их, и варьировать кривую между ними, то из всех кривых кратчайшая — геодезическая. То же самое можно сделать и с поверхностью в пространстве: фиксировать контур на поверхности и варьировать поверхность, ограниченную этим контуром. Нужна вариация с компактным носителем. Подмногообразии минимальное, если для любой вариации с компактным носителем его объём в индуцированной метрике только возрастает. Одномерное минимальное подмногообразие — это геодезическая.

Есть такая теорема. Пусть задано минимальное погружение замкнутой двумерной поверхности  $M$  в единичную сферу  $S^n$ . Тогда индуцированная на  $M$  метрика экстремальна для собственного числа  $\lambda_{N(2)}$  с номером  $N(2)$ , где  $N(\lambda)$  — определённая ранее функция Вейля. Чтобы пользоваться этой теоремой, нужно решить две задачи. 1) Найти минимальные поверхности в сферах. 2) Найти для каждой минимальной поверхности номер  $N(2)$ . Обе эти задачи очень сложные.

Все минимальные торы в сферах описаны в следующих терминах. Условие минимальности поверхности — это интегрируемая система. Эти интегрируемые системы могут быть решены алгебро-геометрическими методами. Это означает, что вы сопоставляете минимальной поверхности некоторые алгебро-геометрические данные — так называемую спектральную кривую, дивизор, выколотые точки, и вы можете восстановить эту поверхность в терминах тэта-функций. Проблема в том, что вы не знаете точно, как этим данным эта минимальная поверхность соответствует. Такое описание есть, но оно на самом деле неэффективно. Лучшее, что можно получить, это утверждение следующего типа: для любого  $n$  можно найти (непонятно, как)  $n$ -параметрическое семейство минимальных торов в  $S^3$ . То есть это, по сути, теоремы существования. Известны некоторые минимальные поверхности в сферах, построенные явно. Но сказать, что мы их знаем все, нельзя. Они описаны в некоторых других терминах.

Вопрос о том, как найти  $N(2)$ , тоже чрезвычайно сложный, потому что мы практически никогда не знаем все собственные числа.

Для некоторых примеров обе задачи решены. Самый простой пример —  $\tau$ -поверхности Лоусона  $\tau_{m,k}$ . Все они расположены внутри трёхмерной сферы и задаются простой явной формулой:

$$(\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y).$$

Обычно требуется, чтобы числа  $m$  и  $k$  были взаимно простыми (иначе поверхность накручивается на себя несколько раз). Если оба числа  $m$  и  $k$  нечётные, то поверхность — тор, а если одно из них чётное, то поверхность — бутылка Клейна. Для этих поверхностей удалось решить обе задачи (Пенской, 2012). Это удалось потому, что уравнение Лапласа после разделения переменных превращается в классическое уравнение — уравнение Ламе. В работе докладчика 2013 года изучаются торы Оцуки. Это достаточно сложно устроенные торы, определённые неявно. Они минимальные в сфере, но не описываются явной формулой. Они параметризуются дробями. Если взять несократимую дробь  $\frac{p}{q}$ , где  $\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , то ей отвечает некоторый тор  $O_{\frac{p}{q}}$ , минимальный в сфере  $S^3$ . Этот тор погружённый, не вложенный. И ответ здесь простой: метрика на торе  $O_{\frac{p}{q}}$  экстремальна для

собственного числа  $\lambda_{2p-1}(g)$ .