НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

globus ГЛОБУС

Общематематический семинар

Разборов А.А. Непрерывная комбинаторика

Александр Александрович Разборов, 26 декабря 2013

Речь пойдёт более или менее обо всём. Всё оказывается взаимосвязанным. Это совсем новые вещи, совсем молодая наука. Она появилась, по моим оценкам, 8-9 лет назад. Она состоит из двух частей. Бóльшая часть — это Лóваш, о котором многие из вас, видимо, слышали, Сегеди и другие люди из Microsoft. Частью поменьше, которая называется алгеброй флагов, занимается ваш покорный слуга. Сегодня я буду рассказывать в основном о части Ловаша. Это — гомоморфизмы графов. Они, как мы увидим, связаны с совсем разными вещами. Ловаш выпустил книгу в Американском математическом обществе, которая называется «Large Networks and Graph Limits» (2012). В этой книге суммировано то, что в этой области произошло с момента её основания, т.е. за последние 6-7 лет. Книга довольно увесистая, 475 страниц. По своей части, алгебре флагов, я написал небольшой вводный текст для «Notices of American Mathematical Society».

За полтора часа я не смогу рассказать очень много. Я начну с введения. Не знаю, все ли присутствующие с этим согласятся, но алгебру отличает от анализа то, что алгебра — это наука про уравнения, а анализ — это наука про неравенства. И в такой науке, как комбинаторика, дискретная математика, такое деление тоже видно. Вы можете изучать либо структуры, которые совсем точные. Например, конечную проективную плоскость; это — аналог обычной проективной плоскости над конечным полем. Суть в том, что если её немножко пошевелить, то она перестанет быть проективной плоскостью; вы изучаете совсем точный объект. А можно изучать различные асимототические вопросы, где от того, что вы свой объект немножко шевелите, он не изменяется или почти не изменяется. Поэтому у меня в заглавии и появилось слово «непрерывная». Мы сегодня будем заниматься исключительно вопросами второго рода.

Что мы пытаемся сделать? У нас имеется какая-то комбинаторная структура; в 90% случаев можно считать, что это — самый обыкновенный граф. Идея состоит в том, что этот граф очень большой. То есть он настолько большой, что уже хочется говорить, что он не просто большой, а бесконечный. Мы собираемся изучать свойства этого графа, которые не меняются при малых шевелениях. То есть если к графу добавить несколько рёбер (или, наоборот, удалить), то свойство, которое нас интересует, не очень сильно изменится. Мы хотим изучать такие объекты: что о них можно сказать, как их можно определить, как их можно задать, и как их изучать математически. То есть мы хотим понять, какие из этого можно извлечь математические структуры.

Давайте попробуем понять, как это делать. Если мы говорим о понятии близости, то первым делом нужно ввести топологию или метрику. Первый естественный вопрос: что означает, что два графа близки? Давайте в начале я покажу способ, который не очень хорош. Но этот способ самый естественный. Для простоты предположим, что наши графы G и H имеют одно и то же количество вершин: $|v(G)| = |v(H)| = n$. Если эти графы изоморфны, то это означает, что их можно совместить так, что рёбра перейдут в рёбра. Самая первая и самая естественная попытка определить расстояние между графами называется Edit Distance. Мы рассматриваем биекцию $\alpha\colon G \to H$ между вершинами графов G и H, рассматриваем симметрическую разность между $E(H)$ (рёбрами графа H) и $\alpha(E(G))$ (рёбрами наложенного графа), делим на количество рёбер полного графа и берём минимум по всем биекциям:

$$\min_{\alpha} \frac{1}{\binom{n}{2}} |E(H) \triangle \alpha(E(G))|.$$

На $\binom{n}{2}$ мы делим потому, что все величины, о которых мы сегодня будем говорить, относительные: мы говорим о плотностях, о вероятностях; о мощностях мы говорить не будем.

В той теории, которую мы строим, эта метрика играет роль, но роль не определяющую. Я хочу показать два поучительных примера, почему эта метрика не вполне хороша. Первый пример происходит из области, которая сейчас очень популярна в теоретической информатике; эта область называется Property Testing. У нас имеется некоторый граф G и нас интересует, сколько из него нужно удалить рёбер, чтобы разрушить все треугольники. Это укладывается в рамки Edit Distance, потому что это — минимальное расстояние до какого-то графа без треугольников: мы берём все графы без треугольников и минимизируем расстояние. Если мы удаляем примерно εn^2 рёбер, где ε — малая константа, то мы можем разрушить не более εn^3 треугольников (просто потому, что каждое ребро принадлежит не более чем n треугольникам). Теперь поставим вопрос в обратную сторону. Известно, что в графе не более δn^3 треугольников. Существует ли такая константа $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, что все эти треугольники можно разрушить, удалив εn^2 рёбер, так, что при этом $\varepsilon \to 0$, когда $\delta \to 0$? Утверждение о том, что это можно сделать, называется Triangle removal Lemma. Никакого элементарного (в разумном смысле слова) этого факта не существует. Первое доказательство, которое было получено, основано на лемме регулярности Семереди (Szemeredi's Regularity Lemma). Это, по-видимому, один из самых известных результатов в комбинаторике. Первоначально оценка здесь была такая: $\delta^{-1} \gg 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$; количество двоек — полином от ε^{-1}. Только

2-3 года назад появилась новая оценка — башня двоек, высота которой является логарифмом от ε^{-1}.

Теперь я хочу привести второй пример, который тоже показывает, что не всё здесь гладко. Он называется *случайный граф*. Для простоты возьмём вероятность $\frac{1}{2}$ и рассмотрим $G(n, \frac{1}{2})$ — модель Эрдёша–Реньи; каждое ребро рисуется с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо от всех остальных. Есть целая наука, напрямую связанная со статистической механикой, которая изучает свойства этого объекта. Если посмотреть литературу о случайных графах, то есть ощущение, что это какой-то фиксированный объект. Что бы про него не спросили, мы всё про него знаем: каким свойством он обладает с вероятностью $1 - o(1)$, каким не обладает. Там даже есть некоторые общие законы, общие теоремы. Но, оказывается, метрика Edit Distance здесь совершенно не адекватна, потому что если вы выберите случайным образом две копии случайного графа, то расстояние (отнормированное) между ними по этой метрике будет константой. И возникает вопрос, существует ли более адекватный способ определять метрику или топологию — пока на конечных объектах, а потом перейти к бесконечным. Оказывается, что такой способ существует. Его прототип виден уже на этом примере. С одной стороны, у нас есть метрика Edit Distance. А с другой стороны, есть утверждение, что количество треугольников мало. Давайте вместо того, чтобы говорить, что количество треугольников мало, скажем, сколько их там. Только в соответствии с нашей идеологией будем говорить об относительном количестве, а не абсолютном, т.е. поделим на $\binom{n}{3}$. Давайте ещё посчитаем не только треугольники, но и циклы (фиксированного размера). Будем считать, что два графа похожи, если для них все такие меры близкие.

То, что я сегодня рассказываю, относится к двум теориям

— к гомоморфизмам графов и к алгебрам флагов. Удобнее считать немного по-разному в этих теориях. Для графов мы считаем плотность гомоморфизмов: $t(H,G) = \frac{\hom(H,G)}{|v(G)|^{|v(H)|}}$ — количество гомоморфизмов графа H в граф G, нормированное естественным образом. Гомоморфизмы здесь не алгебраические; гомоморфизм графа H в граф G — это отображение из множества вершин графа H в множество вершин графа G, переводящее рёбра в рёбра, не обязательно инъективное — две вершины могут попасть в одну вершину. Если рёбра переходят в рёбра, то, в частности, две вершины, соединённые ребром, склеиваться не могут (в графе нет петель, все рассматриваемые нами графы простые). В числителе стоит число гомоморфизмов графов, а в знаменателе — число всех отображений из множества вершин одного графа в множество вершини другого графа.

Для комбинаторных приложений удобнее не гомоморфизмы графов, а инъективные отображения на индуцированный подграф. Другими словами, мы выбираем в G случайным образом столько вершин, сколько их в графе H, и смотрим, какова вероятность того, что то, что на них находится, изоморфно графу H. Но я об этом скажу лишь вскользь, потому что одно выражается через другое с помощью преобразования Мёбиуса. С точки зрения математической теории эти два подхода эквивалентны.

Есть совершенно замечательная работа, предшествующая всему тому, что мы сейчас делаем. Авторы этой работы Chung, Graham, Wilson (1987). Называлась она «Квазислучайные графы». Мы дали общее определение $t(H,G)$, теперь посмотрим, что такое $t(H, G(n, \frac{1}{2}))$. Оказывается, что в пределе $t(H, G(n, \frac{1}{2})) = 2^{-|E(H)|}$. Понятно, чему равна эта вероятность. Нужно позаботиться, чтобы каждое ребро переходило в ребро. Можно это делать независимо. Тогда возникает ошибка, потому что вершины могут склеиваться. Но (и это является частью идеологии) при $n \to \infty$ эта ошибка исчезает. В общем случае $t(H, G(n,p)) = p^{|E(H)|}$.

Пусть ρ — это граф, состоящий из двух вершин, соединённых ребром, а G — произвольный граф, плотность рёбер которого примерно равна p, т.е. $t(\rho, G) \sim p$. Если для цикла C_4 получаем $t(C_4, G) \sim p^4$, то граф G называют *квазислучайным.* Это определение, конечно, кажется немного странным. Но, оказывается, что из этих двух свойств (т.е «правильные» плотности для ρ и C_4) можно извлечь многие свойства, которыми обладает настоящий случайный граф. В частности, вытекает, что такая асимптотика справедлива для любого графа H. Такой граф G оказывается хорошим экспандером, т.е. второе собственное значение его матрицы смежности отделено от первого; первое собственное значение порядка p^n, второе порядка $o(n)$, и т.д.

Давайте теперь посмотрим на математическую теорию. У нас есть возрастающая последовательность графов $G_1, G_2, \ldots,$ $G_n, \ldots$ Можно взять любой граф H и рассмотреть последовательность чисел $t(H, G_1), \ldots, t(H, G_n), \ldots$ Теперь можно ввести топологию: последовательность графов сходится, если для любого фиксированного графа H эта последовательность чисел сходится. Просто поточечная сходимость, никаких ограничений на равномерность мы не налагаем. Если есть поточечная сходимость, то есть теорема Тихонова, и всё получается компактным. Это означает, что из любой возрастающей последовательности графов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. То есть, в принципе, можно ограничиться только сходящимися последовательностями графов, в том смысле что, для любого графа H существует предел последовательности

$t(H, G_1)$, …, $t(H, G_n)$, …и он равен какому-то числу $\varphi(H)$. Под графами можно понимать любые объекты. И в этом месте гомоморфизмы графов и алгебры флагов немножко расходятся; они изучают один и тот же объект, но изучают его семантически и синтаксически. В теории гомоморфизмов графов ставится вопрос: а к чему же сходится последовательность $t(H, G_1)$, …, $t(H, G_n)$, …? Есть предельный объект, на котором есть структура и который можно изучать. Этим мы и будем сегодня заниматься. Вторая теория более синтаксическая. Она возникла из потребностей экстремальной комбинаторики, и в этой теории мы стараемся замалчивать вопрос, к чему сходится эта последовательность. У нас есть последовательность чисел. Она соответствует какому-то пределу $\varphi(H)$. Что про неё можно сказать, не вдаваясь в вопрос о том, чем же является предельный объект, а изучая его чисто синтаксически? Оказывается, что во второй теории возникает достаточное количество структуры. Структура более бедная, чем гомоморфизмы графов. Но преимуществом является то, что она приложима в более общей ситуации, а именно, для произвольных комбинаторных объектов. Для гомоморфизмов графов, как мы увидим, это уже не совсем так; для гомоморфизмов гиперграфов ситуация уже другая, нежели для обыкновенных графов.

Всё дело должно сходиться к какому-то бесконечному графу. Бесконечности бывают разные. Конечно, первая мысль которая здесь возникает: давайте попробуем рассматривать счётное множество. Оказывается, что это мысль совершенно негодная. Хотя логики и занимаются случайным графом на счётном множестве, его скорее нужно называть не случайным, а универсальным графом. Это означает, что если там есть любое конечное множество вершин и вы хотите найти новую вершину, которая с какими-то из них соединена, а с какими-то нет, то вы её всегда сможете найти. Но с нашей точки зрения это неправильно. Можно сразу попытаться объяснить, почему это так. Если у вас есть такой случайный граф, то чему он соответствует: $G(n, \frac{1}{2})$ или $G(n, \frac{1}{3})$? Это всё-таки объекты разные, и мы хотим, чтобы они были разными. А тут они одинаковые; это неправильно. И понятно, почему ничего не получается: потому, что на счётном множестве нет никакой инвариантной меры. Тем не менее, счётные множества потом появляются, потому что тот объект, который я сейчас опишу, допускает описание пятью или шестью разными способами, эквивалентными. И одно из этих описаний как раз эргодическое.

Счётные множества мы пока пропускаем и переходим к измеримым пространствам. Пусть у нас есть какое-то измеримое пространство Ω, для простоты можно считать, что Ω — это отрезок $[0, 1]$ с евклидовой мерой; какое именно это пространство в конце концов окажется не важным. Графом на пространстве Ω будем называть подмножество $E \subset \Omega \times \Omega$, симметричное и измеримое. Это определение уже ближе к истине, но всё равно оно недостаточно. Недостаточно оно по следующей причине. Что такое случайный граф $G(n, \frac{1}{2})$? Если есть последовательнось случайных графов, то она с точки зрения такой топологии сходится. Если задать этот вопрос студенту первого курса, то он ответит: мы берём «случайное» подмножество в $\Omega \times \Omega$ и к нему она будет сходиться. На пятом курсе такой ответ никто не даст, потому что измеримых случайных подмножеств $\Omega \times \Omega$ не бывает; их существование запрещается теорией меры.

Множеству E можно сопоставить характеристическую функцию $E(x, y)$. Например, число треугольников в графе E задаётся интегралом

$$\int_x \int_y \int_z E(x,y)E(x,z)E(y,z)dx\,dy\,dz.$$

Характеристическая функция принимает значения 0 и 1. И единственное, что здесь нужно исправить, чтобы всё получилось, — разрешить этой функции принимать значения в интервале $[0,1]$, т.е. рассматривать взвешенные графы. Это и называется *графон* — основной объект этой теории. То есть графон — это симметрическая функция $W\colon \Omega \times \Omega \to [0,1]$. Это одно из пяти или шести эквивалентных определений.

Давайте теперь поговорим о том, чем же этот объект хорош. Оказывается, что он хорош, грубо говоря, всем. В частности, если у объекта есть пять или шесть эквивалентных определений, то этот объект хороший.

Другое определение графона — это сходящаяся последовательность графов.

Если $W = p$ — постоянная функция, то такой графон и есть случайный граф $G(n,p)$. Такие графоны у нас имеются, и дальше мы как по клавишам проходимся по всему спектру свойств, которые мы бы хотели иметь.

1°. Компактность. Функцию $t(H,W)$ можно обобщить на графоны; пишется такой же интеграл, как для числа треугольников. Мы говорим, что последовательность графов (или даже графонов) $G_1, \ldots, G_n, \ldots$ сходится к графону W, если последовательность чисел $t(H,G_1), \ldots, t(H,G_n), \ldots$ сходится к $\varphi(H) = t(H,W)$. Если последовательность графов сходится, то существует графон, который является её пределом. Доказательство этого использует лемму регулярности Семереди; без неё не получается. Более того, лемма Семереди и это утверждение (о компактности[1] пространства графонов) — это более

[1]При чём тут компактность? На графонах можно задать метрику многими способами, например

или менее одно и то же; этому можно придать вполне точный смысл.

2°. Плотность. У вас имеется графон. Можно ли его приблизить конечной последовательностью графов? Ответ положительный. Если у вас есть отрезок $[0,1]$, и вы на нём набросаете случайно n точек, посмотрите на полученный индуцированный граф на этих точках (а если граф взвешенный, то после набрасывания точек надо ещё с соответствующими вероятностями провести рёбра), то оказывается, что с вероятностью 1 эта последовательность будет сходиться именно к нашему графону. То есть любой графон приближается просто с помощью случайной выборки.

3°. Третье свойство совершенно фантастическое. Я его сейчас скажу, но мне никто не поверит, что это так. Это очень большая статья с очень сложной математикой, с настоящей теорией меры. Оказывается, что графон, соответствующий сходящейся последовательности, единственный в эргодическом смысле. То есть если у вас есть два графона, для которых все наши интегралы совпадают для всех графов H, то соответствующие функции W эквивалентны с точностью до множества меры нуль: можно устроить такое преобразование отрезков, что они будут совпадать.

Есть ещё одна теория, которая менее разработана, и на мой взгляд более сложная. Это то, что я называю *графины*. У вас имеется какая-то константа D и вас интересуют графы, у которых степень ограничена этой константой. Оказывается, что и в этом случае можно сказать, чему будут равны пределы. И почти всё в этой теории переносится, правда, с гораздо большими трудностями, на графины. Что такое графин, я точно

как $\sum_n 2^{-n}|t(H_n,W_1)-t(H_n,W_2)|$, где $\{H_n\}$ — произвольное перечисление конечных графов. И тогда сходящиеся последовательности графов или графонов — это в точности последовательности Коши.

определять не буду, но примерно происходит следующее. Мы будем считать, что в графе в каждой вершине помечены рёбра. В этой модели графин определяется без всяких весов, просто как какой-то граф степени D на отрезке $[0,1]$. Множество вершин графа измеримо, а больше почти ничего не требуется. Есть только одно дополнительное условие: если в графе выбрать подмножества A и B (пусть для простоты эти множества одинаковой меры) и рассмотреть граф, состоящий из рёбер между этими множествами, то средняя степень вершины в множестве A равна средней степени вершины в множестве B. Для множеств разной меры тоже выполняется аналогичное свойство; нужно только добавить множитель.

Интересно, что те свойства, которые для графонов сложные, они на графины переносятся. Доказательства, правда, становятся ещё более сложными. А вот то, что для графонов очевидно, а именно плотность, сюда не переносится. Очевидное доказательство для плотности не переносится, потому что если у вас есть графин и вы сделаете случайную конечную выборку в нём, то, ввиду того, что он очень разреженный, вы не увидите вообще ни одного ребра. Более или менее очевидно, как пытаться это модифицировать: брать какую-то точку, брать её покрывающее дерево, смотреть, с чем оно соединено, как-то пытаться это сделать. Но устроить хорошую случайную выборку пока ни у кого не получилось.

Для графина тоже можно дать определение в терминах плотности, как это делается для графона. В конечном графе фиксируется вершина v_0 и рассматривается шар радиуса R с центром в этой вершине. Получается некий конечный граф. После этого мы усредняем по выбору вершины v_0. Получается распределение шаров радиуса R.

Два определения графона я дал. На третье определение я просто намекну. Оказывается, что последовательность чисел $\varphi(H)$ соответствует гомоморфизму из алгебры флагов в вещественные числа. Графон — это представление этой алгебры, и конечная последовательность тоже представление этой алгебры.

Давайте я теперь объясню, что такое алгебра флагов. Только я хочу перейти к более привычному (для меня) языку и рассматривать $p(H, G)$. Если граф H содержит l вершин, то в графе G мы случайным образом выбираем l вершин и смотрим, какова вероятность того, что порождённый ими граф изоморфен H. Если граф H фиксирован, то у нас есть функция на множестве всех графов G. Можно рассмотреть формальные линейные комбинации $\mathbb{R}\mathcal{M}$. Здесь $\mathcal{M}$ — от слова «модель», потому что эту конструкцию можно применить не только к графам, а к чему угодно: к гиперграфам, ориентированным графам, раскрашенным графам, смешанным графам.

Отображение $\mathbb{R}\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ (для фиксированного большого графа, а еще лучше графона G) у нас уже есть. Оказывается, что его можно профакторизовать по соотношениям, которые выполняются всегда. Я приведу для примера простейшее соотношение. Допустим, что я просто хочу посчитать плотность рёбер в графе или лучше в графоне. Можно просто посчитать, а можно посчитать так: давайте я набросаю три точки случайным образом, посмотрю, сколько есть рёбер между этими точками, и составлю линейную комбинацию. Это можно записать так: $\rho = \frac{1}{3}I \cdot + \frac{2}{3}V + \nabla$ (вероятность ребра в графе равна одной трети вероятности того, что на трёх точках одно ребро, плюс две трети вероятности того, что на трёх точках два ребра, плюс вероятность треугольника). Такие соотношения у нас будут выполнены всегда. Это пример линейного соотношения, а есть ещё полиномиальные соотношения. Полиномиаль-

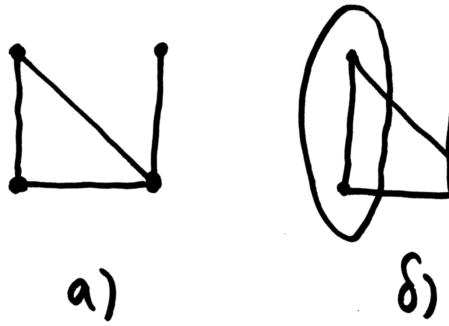

Рис. 1.

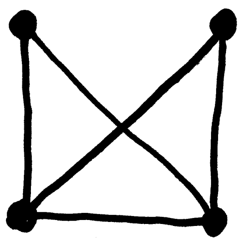

Рис. 2.

ные соотношения проще всего описывать, если на факторпространстве, которое я обозначу $\mathcal{A}^0$, ввести структуру алгебры. Получается ассоциативная коммутативная алгебра.

Умножение вводится следующим образом. Пусть, например, я хочу вычислить квадрат элемента ρ (т.е. квадрат плотности ребра). Для этого я набросаю случайным образом 4 точки и посмотрю на количество паросочетаний в том, что получится, с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Нужно будет перечислить все графы на четырёх вершинах (их 11 штук), и для каждого взять число паросочетаний, делённое на 3. Коэффициенты получаются следующим образом. Я набрасываю две пары точек. Меня интересует событие, которое заключается в том, что в первый раз получается ребро и во второй раз получается ребро. Это будет ρ^2, из-за независимости. А теперь я хочу посчитать по-другому: я считаю, что сначала я набрасываю четыре точки, а потом уже их случайным образом делю по парам. Это формула условной вероятности, коэффициенты будут в точности вероятности на втором шаге. Вычислим, например, коэффициент при графе, изображённом на рис. 1, а. Я все его точки набросал, после этого я делю их случайным образом на пары. У меня есть три возможности это сделать. Только одна из них приводит к паросочетанию (рис. 1, б): ребро должно быть на каждой паре точек. В итоге коэффициент будет $\frac{1}{3}$, потому что годится только одна возможность из трёх. А для графа, изображённого на рис. 2, коэффициент будет $\frac{2}{3}$.

Ещё нужно потребовать, что $p(H) \geq 0$ для любого H, потому что это у нас вероятности. И оказывается, что этого уже достаточно; сравнительно просто доказать следующее: если у вас есть любой гомоморфизм из алгебры $\mathcal{A}^0$ в вещественные числа, который удовлетворяет условию $p(H) \geq 0$, то это то же самое, что графоны, то же самое, что сходящиеся последовательности. Мы ничего не потеряли.

Когда я лет шесть назад рассказывал эти вещи в IAS, там тоже сидели алгебраисты, и когда они увидели моё обозначение $\mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^0, \mathbb{R})$, (видимо, для них это естественная реакция) сразу спрашивают: нельзя ли как-нибудь применить когомологии, чтобы это дело изучать. Вопрос естественный, конечно. На самом деле, из этого вопроса последовала единственная нетривиальная теорема самой теории алгебры флагов. Всё остальное здесь — просто язык. Удобный язык, чтобы получать конкретные результаты. Теорема состоит в том, что для графов, а также для огромной массы теорий (есть точные критерии) оказывается, что алгебра $\mathcal{A}^0$ не очень интересна; это просто алгебра полиномов от счётного числа неизвестных. И объект $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^0, \mathbb{R})$ без знака плюс оказывается не слишком интересным; это просто последовательность чисел.

Для любого элемента f из алгебры $\mathcal{A}^0$ можно спросить, будет ли он неотрицателен на любом гомоморфизме из $\mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^0, \mathbb{R})$. Запись $f \geq 0$ означает, что $\varphi(f) \geq 0$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^0, \mathbb{R})$. А элемент f — это линейная комбинация, возможно, с отрицательными коэффициентами. Hamed Hatami и Серёжа Норин доказали совершенно замечательную вещь. Они доказали, что эта задача алгоритмически неразрешима. Более того, соответствующее множество рекурсивно неперечислимо.

Возникает вопрос, который мне кажется очень интересным, но я не знаю, как к нему подступаться. Можно ли аналогичные вещи доказать для естественных задач, пусть даже и в смысле ограниченной неполноты, т.е. в том смысле, что есть какие-то *интересные* задачи, которые данным классом методов решить невозможно. Лучше бы, конечно, что их вообще невозможно решить, но хотя бы данным классом методов.

И ещё я хочу поговорить о том, как графоны сравнивать между собой. Топологию я определил, теперь определю метрику. Метрики можно определить разные, самая простая (в соответствии со значениями $t(H, W)$) уже упоминалась в примечании 1. Но нас сейчас интересуют «внутренние» определения. Первая метрика, которую я сейчас определю, плохая. Графоны W_1 и W_2 понятно, как сравнивать. Во-первых, их нужно пытаться наложить друг на друга с помощью сохраняющего меру преобразования. Это фактически то, с чего я начал (Edit Distance); но мы от него отказались. Но теперь появляется надежда. В самом деле: если у вас имеются графоны, которые одинаковы с точки зрения этой последовательности, то они изоморфны. Есть только один случайный графон: постоянная функция $\frac{1}{2}$; других нет. Дело за «малым»: найти подходящую норму. Попытаемся наложить W_1 на W_2 оптимальным образом. Наложим их, вычтем. Вопрос в том, если у вас есть не графон, а просто отображение из конечных графов в вещественные числа, то как его нормировать, и оказывается, что правильным ответом будет так называемая cut-norm $\delta_\square$. Эта норма определяется так. Пусть $D = W_1 - \alpha(W_2)$, где α — некоторое наложение. Тогда

$$\delta_\square(W_1 - W_2) = \min_\alpha \max_{A,B} \left| \int_A \int_B D(a,b)da\,db \right|,$$

где $A \subset W_1$ и $B \subset W_2$. Есть теорема, что это в точности соответствует графонам, т.е. даёт ту же самую топологию. Другими словами, $t(H, W_1) \approx t(H, W_2)$ для всех H тогда и только тогда, когда величина $\delta_\square(W_1 - W_2)$ мала. В одну сторону (из того, что величина $\delta_\square(W_1 - W_2)$ мала, следует, что $t(H, W_1) \approx t(H, W_2)$) это доказывается более или менее легко. Обратное утверждение нетривиально, там возникают двойные экспоненты.