

## 10

**10.1.** Сравните *векторное произведение* в пространстве *мнимых кватернионов*  $\text{Im}\mathbb{H} := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$  с коммутатором  $[q_1, q_2] := q_1q_2 - q_2q_1$  в теле кватернионов  $\mathbb{H}$ .

**10.2.** Рассмотрим на *векторном* пространстве  $\mathbb{k}[x]$  многочленов над некоторым полем *вронскиан*  $W(f, g) := f'g - fg'$ . Образует ли это пространство вместе с "умножением"  $(f, g) \mapsto W(f, g)$  алгебру какого-либо известного типа?

**10.3.** Рассмотрите на вещественном векторном пространстве *октав*  $\mathbb{O} := \mathbb{H} \times \mathbb{H}$  произведение *Кэли-Диксона*  $(x, y)(u, v) := (xu - \bar{v}y, vx + y\bar{u})$ . Узнаёте ли вы его при  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ? При  $x, y, u, v \in \mathbb{C}$ ? Ассоциативно ли оно? Найдите нейтральный элемент  $\mathbf{1} \in \mathbb{O}$ . Найдите мультипликативно обратную октаву к  $(x, y) \in \mathring{\mathbb{O}} := \mathbb{O} \setminus \{(0, 0)\}$ .

**10.4.** Убедитесь в том, что множество  $\mathring{\mathbb{O}} := \mathbb{O} \setminus \{(0, 0)\}$  образует *магму* относительно произведения Кэли-Диксона. Проверьте в этой магме *тождество Муфанг*

$$q(o(qp)) = ((qo)q)p.$$

**10.5\*.** Найдите в алгебре октав  $\mathbb{O}$  семь подалгебр, изоморфных телу кватернионов  $\mathbb{H}$ .

В задачах **10.6** и **10.7** обозначено  $\mathbb{k}[x]_{\leq n} := \{f \in \mathbb{k}[x] \mid \deg f \leq n\}$ .

**10.6.** Пусть  $\mathbb{k}$  – поле произвольной характеристики,  $a, b \in \mathbb{k}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Вычислите след эндоморфизма  $\mathbb{k}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{k}[x]_{\leq n} : f(x) \mapsto f(ax + b)$ . При всех ли  $\mathbb{k}$  и  $n$  найдутся такие  $a$  и  $b$ , что этот след отличен от 0?

**10.7.** Рассмотрим для  $n \in \mathbb{N}$  морфизмы  $\mathcal{A} : \mathbb{k}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{k}[x]_{\leq n-1} : F \mapsto F'$  и  $\mathcal{B} : \mathbb{k}[x]_{\leq n-1} \rightarrow \mathbb{k}[x]_{\leq n} : f \mapsto xf$ . Вычислите следы  $\text{tr}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$  и  $\text{tr}(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})$ .

**10.8.** Пусть  $V$  – трёхмерное векторное пространство над произвольным полем. Составьте таблицу *внешнего* умножения для базисных элементов внешней алгебры  $\bigwedge^\bullet V$ . **Рекомендуемые обозначения.**  $V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle; e_{12} = e_1 \wedge e_2, e_{13} = e_1 \wedge e_3, e_{23} = e_2 \wedge e_3; e_{123} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ .

**10.9.** Решите аналог предыдущей задачи для случая  $\dim V = 4$ . Отразите в таблице *суперкоммутативность* внешнего умножения.

10 декабря, Г.Б. Шабат