

Листок 5. Ext

▷ Везде в этом листке M, N, X — модули над (одним и тем же) кольцом.

Задача 5.1. Модуль M проективный тогда и только тогда, когда $\text{Ext}^1(M, X) = 0$ для любого модуля X .

Задача 5.2. Вычислите все Ext'ы в категории конечнопорожденных а) \mathbb{Z} -модулей; б) $\mathbb{C}[x]$ -модулей.

Задача 5.3. Вычислите а) $\text{Ext}_{k[x,y]}^{\bullet}(k, k)$; б) $\text{Ext}_{k[x_1, \dots, x_n]}^{\bullet}(k, k)$; в*) $\text{Ext}_{\Lambda(V)}^{\bullet}(k, k)$.

Задача 5.4. Для каждой точной тройки вида $M \rightarrow X \rightarrow N$ рассмотрим образ тождественного отображения при связывающем гомоморфизме $\text{Hom}(M, M) \rightarrow \text{Ext}^1(N, M)$.

а) Это соответствие задает биекцию между $\text{Ext}^1(N, M)$ и расширениями N при помощи M (рассматриваемых с точностью до изоморфизмов, тождественных на N и M).

б*) Сумме двух элементов группы $\text{Ext}^1(N, M)$ соответствует расширение $X_1 \times_N X_2$.