

НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 1.
Теорема о неявной функции, k -поверхности в \mathbb{R}^n . 7.09.2015.

Задача 1. Доказать, что $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ — неособая гиперповерхность (то есть гладкая регулярная поверхность коразмерности 1) в пространстве $n \times n$ -матриц.

Задача 2. Доказать, что $\text{SO}(n)$ — неособая (то есть гладкая регулярная) поверхность в пространстве $n \times n$ -матриц.

Задача 3. Задать тор вращения как гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в \mathbb{R}^3 . Является ли эта поверхность неособой?

Задача 4. Физики говорят, что «если $f(x, y, z) = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = -1$ ». Придайте смысл этому высказыванию.

Задача 5. Пусть F не имеет критических точек, и $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ задаёт компактную поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что при малых t уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = t$ задают неособые компактные поверхности S_t , лежащие в $\delta(t)$ -окрестности S , причём $\delta(t) = O(t)$ при $t \rightarrow 0$.

Задача 6. Используя предыдущую задачу, доказать, что набор из локальных координат на S и t можно использовать (как?) в качестве локальных координат в окрестности S в \mathbb{R}^n .

Задача 7. Пусть S гладкая k -мерная поверхность, и $d_p : S \rightarrow \mathbb{R}$ функция, заданная формулой $d_p(x) = \|p - x\|^2$, где p — фиксированная точка. Доказать, что в точках экстремума функции d_p вектор $p - x$ ортогонален S .

Задача 8. Доказать, что для любой прямой, перпендикулярной S в точке $q \in S$, существует не более k точек p таких, что $d_p(x)$ имеет q своей вырожденной критической точкой.

Задача 9. Будем говорить, что некоторая точка на кривой является точкой перегиба, если в малой окрестности этой точки кривая лежит по обе стороны от касательной в этой точке. Пусть кривая задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$. Доказать, что если (x_0, y_0) — точка перегиба, то

$$(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2)(x_0, y_0) = 0.$$

Задача 10. Сколько точек перегиба может быть у кубики (то есть в случае, когда $F(x, y)$ — полином степени 3 от x, y)?