

**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 8.**  
**Когомологии де Рама-II. 26.10.2015.**

В данном листке под когомологиями подразумеваются исключительно когомологии де Рама. При решении задач данного листка запрещено использовать изоморфизмы с другими когомологиями.

**Задача 1.** (Лемма о пяти гомоморфизмах). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e & & \\ \dots & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

из абелевых групп и их гомоморфизмов, такую что горизонтальные стрелки образуют две точные последовательности. Докажите, что если  $a, b, d, e$  являются изоморфизмами, то  $c$  тоже изоморфизм.

**Задача 2.** Найдите когомологии  $\mathbb{C}P^n$ .

**Задача 3.** Найти кольцо когомологий  $\mathbb{R}P^n$  (то есть не только найти  $H^i(\mathbb{R}P^n)$ , но и понять, как устроено умножение в когомологиях).

**Задача 4.** Найти когомологии двумерной сферы с  $g$  приклеенными ручками.

**Задача 5.** Найти когомологии бутылки Клейна  $\mathbb{K}l$ .

**Задача 6.** Найти когомологии  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  (дополнение к окружности в трехмерном пространстве).

**Задача 7.** Найти когомологии  $S^3 \setminus S^1$  (дополнение к окружности в трехмерной сфере).

**Задача 8\*.** Докажите лемму Пуанкаре для когомологий с компактным носителем:  $H_c^k(M \times \mathbb{R}^1) = H_c^{k-1}(M)$ . *Указание.* Пусть  $t$  обозначает стандартную координату на  $\mathbb{R}$ . Рассмотрите отображение послыоного интегрирования  $\pi_* : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(M)$ , которое формы без  $dt$  переводит в ноль, а формы с  $dt$  интегрирует  $\int_{\mathbb{R}^1}$ . Пусть  $e = e(t)dt$  такая форма с компактным носителем на  $\mathbb{R}^1$ , что  $\int_{\mathbb{R}^1} e = 1$ . Рассмотрите отображение  $e_* : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1)$ , это просто операция умножения на  $e$ . В качестве оператора гомотопии рассмотрите оператор  $K : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(M \times \mathbb{R}^1)$ , который переводит формы без  $dt$  в ноль, а формы с  $dt$  он преобразует так:

$$\omega \mapsto \int_{-\infty}^t \omega - \int_{-\infty}^t e \int_{-\infty}^{+\infty} \omega.$$

**Задача 9.** Найдите когомологии с компактным носителем листа Мебиуса.

**Задача 10\*.** Пусть  $M^n$  гладкое компактное ориентированное многообразие без края,  $\omega$  —  $n$ -форма на  $M$ , а  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  гладкая функции. Положим  $M_c = \{x | \varphi(x) \leq c\}$ .

Предположим, что  $c_0 \in \mathbb{R}$  такое число, что  $\varphi(x) = c_0 \implies d\varphi(x) \neq 0$ . Тогда  $M_{c_0}$  — многообразие с краем, и  $M_c$  — тоже многообразие с краем для всех  $c$  их некоторой окрестности  $c_0$ .

Пусть

$$F(c) := \int_{M_c} \omega.$$

Доказать, что  $F(c)$  является гладкой функцией от  $c$  и производная  $\frac{dF(c)}{dc}$  может быть представлена в виде интеграла  $\int_{\partial M_c} \tilde{\omega}$  от некоторой  $n-1$ -формы  $\tilde{\omega}$ .

Найти  $\tilde{\omega}$ .