

Предел функции и непрерывность

1. (а) Могут ли точки $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ и только они быть предельными точками некоторого множества действительных чисел?

(б) Могут ли предельными точками счетного множества быть все точки \mathbb{R} ?

2. В каких точках следующие функции имеют пределы: (а) $\sin \frac{1}{x}$, (б) $x \sin \frac{1}{x}$?

3. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены (укажите все варианты)?

4. Пусть функция $g(x) \rightarrow B$, $x \rightarrow x_0$ и $g(x)$ не принимает значения B в некоторой проколотой окрестности x_0 , а функция $f(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow B$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ существует и равен A .

5. Докажите, что сумма, разность, произведение и композиция непрерывных функций тоже непрерывны. Докажите, что если функция f непрерывна и не обращается в ноль, то и функция $1/f$ непрерывна.

6. Каким может быть множество значений непрерывной на интервале функции?

7. Докажите непрерывность функций (а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$; (б) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

8. (а) В каких точках имеет предел функция Римана: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ НОД}(m, n) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$?

(б) В каких точках она непрерывна?

9. Докажите, что монотонная функция может иметь разрывы только первого рода, т.е. в любой точке x_0 она имеет предел слева $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и предел справа $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

10. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ переводит каждый отрезок в отрезок. Следует ли отсюда, что она непрерывна?

11. Докажите, что на экваторе найдутся две противоположных точки с одинаковой температурой.

12. На сковородке лежат два блина. Докажите, что их можно разрезать одним разрезом так, чтобы каждый из блинов разделить на два куса одинаковой площади.

13. Докажите, что непрерывная функция обладает обратной функцией тогда и только тогда, когда она строго монотонна, и при этом обратная также непрерывна и строго монотонна.

14. Определите функцию $f(x) = a^x$, $a > 0$ на \mathbb{R} . Покажите, что она монотонно возрастает (убывает) при $a > 1$ ($a < 1$) и непрерывна. Определите ее обратную функцию $f^{-1}(x) = \log_a x$ на $(0, +\infty)$.

15*. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.