

Производная

1. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и дифференцируема в этой точке, а $g(y)$ определена в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и дифференцируема в y_0 . Докажите, что их композиция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ определена в окрестности x_0 , дифференцируема в x_0 и $(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

2. Пусть $f : U \rightarrow V$ и $f^{-1} : V \rightarrow U$ взаимно обратные и непрерывные в точках $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0) \in V$ соответственно. Докажите, что, если $\exists f'(x_0) \neq 0$, то $f^{-1}(y)$ дифференцируема в y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.

3. Найдите производную функции $f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+100)$ в точке $x = -1$.

4. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции нечетна, а нечетной – четна.

5. Придумайте функцию f на прямой, которая непрерывна только в одной точке и в ней дифференцируема.

6. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7[×]. Найдите производные функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccstg} x$.

8. Вычислите пределы: (а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$; (б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$; (в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

9. Найдите производные функций a^x , $\log_a x$, x^α .

10. Найдите $\max_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

11. Пусть функция f дифференцируема на $[a, b]$. Докажите, что ее производная на $[a, b]$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$. (Указание: рассмотрите случай, когда $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки.)

12. На плоскости в точке $(p/2, 0)$ находится источник света. Докажите, что лучи, выпущенные из источника, после отражения от параболического зеркала $y^2 = 2px$ распространяются параллельно друг другу.

13*. Докажите, что множество точек разрыва первого рода у произвольной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не более чем счетно.

14*. Постройте пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции.

Задачи с крестиками “×” не нужно сдавать, если вы ранее знали их решения.