

## Клеточные гомологии

Определение клеточных гомологий плохо подходит для доказательства общих свойств (например, гомотопической инвариантности), но отлично подходит для вычисления гомологий несложных пространств.

**Задача 4.1.** Вычислите гомологии

а) сферы с  $g$  ручками; б)  $\mathbb{C}P^n$ ; в)  $\mathbb{R}P^n$ ; г)  $n$ -мерного тора; д)  $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ .

**Задача 4.2.**  $H_{n+1}(\Sigma X) = H_n(X)$ .

**Задача 4.3.** Пространства  $S^1 \times S^1$  и  $S^2 \vee S^1 \vee S^1$  имеют изоморфные гомологии, но гомотопически не эквивалентны.

Напомним, что дополнение в  $S^3$  к двум стандартным образом зацепленным окружностям гомотопически эквивалентно первому из пространств из предыдущей задачи, а к двум незацепленным окружностям — второму.

**Задача 4.4.** а)  $H_0(X)$  свободная группа, ранг которой — число компонент линейной связности  $X$ .

б)  $H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ .

**Задача 4.5.** Пусть  $L_p$  — это фактор  $S^\infty$  по свободному действию группы  $\mathbb{Z}/p \subset S^1$ . Вычислите гомологии этого пространства.