

Когомологии

Задача 9.0. Найдите замкнутую, но не точную

а) 1-форму в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; б) 2-форму в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Задача 9.1. а) Если k — поле, то $H^\bullet(X; k) \cong \text{Hom}(H_\bullet(X); k)$.

б) $\text{Hom}(H_\bullet(X); \mathbb{Z})$ не удовлетворяет аксиомам теории когомологий; в частности, $H^\bullet(X) \not\cong \text{Hom}(H_\bullet(X); \mathbb{Z})$.

Задача 9.2. Если k — поле, X и Y конечные клеточные комплексы, то $H(X \times Y; k) \cong H(X; k) \otimes H(Y; k)$.

Следствие: диагональное отображение $X \rightarrow X \times X$ индуцирует умножение $H^i(X; k) \otimes H^j(X; k) \rightarrow H^{i+j}(X; k)$. Можно показать, что это то же умножение, что определялось на лекции.

Задача 9.3. а) $H^\bullet(\mathbb{T}^2) \cong \Lambda[\xi_1, \xi_2]$. б) Найдите кольцо когомологий сферы с g ручками.

▷ Как мы увидим чуть позже (а пока можно этим пользоваться),

$$\begin{aligned} H(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) &\cong \mathbb{Z}/2[a]/(a^{n+1}) \quad (\deg a = 1), \\ H(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1}) \quad (\deg x = 2). \end{aligned}$$

Задача 9.4. Если $m > n$, то любое отображение $\mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$ индуцирует тривиальное отображение в когомологиях.

Задача 9.5. $H^\bullet(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}) \cong H^\bullet(\mathbb{R}P^2 \vee S^3; \mathbb{Z})$, но $H^\bullet(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}/2) \not\cong H^\bullet(\mathbb{R}P^2 \vee S^3; \mathbb{Z}/2)$.

▷ Пространство X с отмеченной точкой $e \in X$ и “умножением” $\mu: X \times X \rightarrow X$, т. ч. $\mu(e, -) \sim \mu(-, e) \sim \text{Id}_X$, называется H -пространством.

Задача 9.6. а) Если $\mathbb{R}P^{n-1}$ является H -пространством, то в $\mathbb{Z}/2$ -когомологиях $\mu^*(a) = a_1 + a_2 \in H^\bullet(\mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[a_1, a_2]/(\dots)$.

б) Если на \mathbb{R}^n есть структура \mathbb{R} -алгебры (возможно неассоциативной) с делением, то $n = 2^k$.

На самом деле, в этом случае $n = 1, 2, 4$ или 8 .