

Фундаментальная группа

- ▷ Пусть заданы гомоморфизмы групп $f_{1,2}: H \rightarrow G_{1,2}$. Амальгамированное произведение $G_1 *_H G_2$ — это фактор свободного произведения $G_1 * G_2$ по всем соотношениям вида $f_1(h) = f_2(h)$. Примеры: при $H = \{e\}$ получается просто свободное произведение, при $G_2 = \{e\}$ — фактор G_1 по нормальному замыканию образа H .
- ▷ Пусть $X = U \cup V$, причем пространства $U, V, U \cap V$ линейно связны. Пусть еще либо U и V открыты, либо U и V — CW-подкомплексы CW-комплекса X . Тогда *теорема Зейферта – ван Кампена* утверждает, что $\pi_1(X) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$.

Задача 9.0. Приведите пример таких линейно связных $U, V, U \cap V$, что $\pi_1(U \cup V) \not\cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$

Задача 9.1. Фундаментальная группа букета n окружностей — свободная группа с n образующими.

Задача 9.2. Для CW-комплекса X естественное отображение $\pi_1(\text{sk}_n X) \rightarrow \pi_1(\text{sk}_{n+1} X)$
а) биективно при $n > 1$; б) сюръективно при $n = 1$.

Задача 9.3. Вычислите фундаментальную группу а) S^n ; б) $\mathbb{R}P^n$; в) $\mathbb{C}P^n$.

Задача 9.4. \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 не гомеоморфны (ср. с задачей 1.2).

Задача 9.5. Не существует ретракции ленты Мёбиуса на ее граничную окружность.

* * *

Задача 9.6. а) Фундаментальная группа бутылки Клейна изоморфна группе с двумя образующими и единственным соотношением $c_1^2 c_2^2 = 1$.

б) Фундаментальная группа сферы с g ручками изоморфна группе с $2g$ образующими и единственным соотношением $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$, где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. А ее фактор по коммутанту изоморфен \mathbb{Z}^{2g} .

- ▷ Следствие: для разных g сферы с g ручками не гомеоморфны (и даже гомотопически не эквивалентны).

Задача 9.7*. а) Задайте фундаментальную группу дополнения в \mathbb{R}^3 до стандартно вложенной окружности и до трилистника образующими и соотношениями. Убедитесь, что их факторы по коммутанту изоморфны.

б) Докажите, что эти группы все же не изоморфны (указание: постройте сюръекцию π_1 дополнения до трилистника на S_3).

- ▷ Следствие: трилистник невозможно развязать.

