

Конечные поля

Задача 1. Пусть k – конечное поле характеристики p . Докажите, что k состоит из p^n элементов для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. a°) Пусть k – конечное поле из p^n элементов. Докажите, что любой элемент x поля k удовлетворяет уравнению $x^{p^n} - x = 0$.

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики p . Обозначим через \mathbb{F}_{p^n} множество решений уравнения $x^{p^n} - x = 0$ в K .

b°) Докажите, что \mathbb{F}_{p^n} содержит ровно p^n элементов.

c°) Докажите, что \mathbb{F}_{p^n} – подполе в K .

d) Докажите, что \mathbb{F}_{p^n} не зависит от K и что любое поле из p^n элементов изоморфно \mathbb{F}_{p^n} .

Задача 3. Пусть $k = \mathbb{F}_{p^n}$ – поле. a) Сколько существует в k корней степени m из 1?

b) Сколько существует в k корней степени m из $a \in k$?

c), d) Те же вопросы для алгебраически замкнутого поля k характеристики p .

Задача 4. a) Разделите с остатком $x^n - 1$ на $x^m - 1$ и $x^{p^n} - x$ на $x^{p^m} - x$.

b°) При каких n и m поле \mathbb{F}_{p^n} содержит \mathbb{F}_{p^m} ? c) Найдите $\mathbb{F}_{p^n} \cap \mathbb{F}_{p^m}$.

Задача 5. Пусть $f(x)$ – неприводимый многочлен степени n над \mathbb{F}_p , а K – алгебраически замкнутое поле характеристики p .

a) Докажите, что все корни f лежат в \mathbb{F}_{p^n} .

b) Докажите, что f не имеет кратных корней.

c) Обратно, если $x \in \mathbb{F}_{p^n}$, то x является корнем неприводимого многочлена над \mathbb{F}_p степени d , где $d|n$.

Задача 6. a) Докажите равенство

$$x^{p^n} - x = \prod_{d|n} \prod_{\deg f=d} f(x),$$

где произведение берётся по неприводимым над \mathbb{F}_p многочленам со старшим коэффициентом 1. Пусть $\psi(n)$ – число неприводимых над \mathbb{F}_p многочленов степени n со старшим коэффициентом 1.

b) Покажите, что $p^n = \sum_{d|n} d\psi(d)$.

c) Обращая предыдущее равенство, получите выражение для $\psi(n)$.

d) Докажите, что для любого n существуют неприводимые многочлены степени n над \mathbb{F}_p .

Пусть k – поле характеристики p . Обозначим через $\Phi: k \rightarrow k$ отображение Фробениуса: $x \mapsto x^p$.

Задача 7. a°) Покажите, что Φ является гомоморфизмом полей.

b°) Покажите, что для конечного или алгебраически замкнутого поля Φ является автоморфизмом.

c) Приведите пример поля, для которого гомоморфизм Фробениуса не обратим.

d) Докажите, что число сочетаний $C_{p^n}^k$ делится на p при $0 < k < p^n$.

Задача 8. Пусть $k = \mathbb{F}_{p^n}$ – поле из p^n элементов.

a) Найдите порядок Φ в группе автоморфизмов k .

b) Докажите, что все автоморфизмы k имеют вид Φ^i .

Задача 9. a) Докажите, что поле $\cup_n \mathbb{F}_{p^n}$ алгебраически замкнуто.

b^*) Опишите его автоморфизмы.