Тема 1: Алгебры Клиффорда

Напомним, что

- (V, q) — векторное пространство с квадратичной формой q над полем $\Bbbk$, $V^\times$ — подмножество векторов с ненулевой нормой, $b(x, y)$ — билинейная симметрическая форма, связанная с q;

- $Cl(V, q)$ — ассоциированная с ним алгебра Клиффорда, $Cl^0(V, q)$, $Cl^1(V, q)$ — её четная и нечетная части, $\alpha : Cl(V, q) \to Cl(V, q)$ — инволюция, задающая четность, $Cl^\times(V, q)$ — множество обратимых элементов в алгебре;

- $\widetilde{Ad}$ — действие группы $Cl^\times(V, q)$ на алгебре $Cl^(V, q)$ (модифицированными) сопряжениями, $\widetilde{P}(V, q)$ — подгруппа в $Cl^\times(V, q)$, состоящая из элементов φ, таких, что $\widetilde{Ad}_\varphi$ переводит V в себя;

- $P(V, q)$ — подгруппа в $Cl^\times(V, q)$, порожденная $V^\times$, $Pin(V, q)$ — подгруппа, порожденная векторами с нормой ± 1, $Spin(V, q) = Pin(V, q) \bigcap Cl^0(V, q)$;

- $Cl_{r,s}$ — алгебра Клиффорда, соответствующая вещественному векторному пространству размерности $n = r + s$, снабженному невырожденной квадратичной формой индекса r (т.е. содержащей s отрицательных квадратов), $Cl_n = Cl_{n,0}$, $\mathbb{C}l_n$ — комплексная алгебра Клиффорда, соответствующая стандартной невырожденной квадратичной форме на $\mathbb{C}^n$, аналогично определяем $Pin_{r,s}$, Pin_n, $Spin_{r,s}$, $Spin_n$, $Spin_n^{\mathbb{C}}$.

1. Докажите, что если $\Bbbk^\times = \{(\Bbbk^\times)^2\} \bigcup \{-(\Bbbk^\times)\}$, то
$$\widetilde{P}(V, q)/P(V, q) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \sqrt{-1} \in \Bbbk, \\ 1, & \sqrt{-1} \notin \Bbbk. \end{cases}$$

2. Докажите изоморфизмы:
   a) $Cl_{r,s} \cong Cl_{r-4,s+4}$;
   b) $Cl_{r,s+1} = Cl_{s,r+1}$.

3. Используя изоморфизмы из предыдущей задачи, найдите $Cl_{r,s}$ для $0 \le r, s \le 8$.

4. Докажите, что при изоморфизме $Cl(V, q) \cong \Lambda^* V$ клиффордово умножение $v\cdot$ на элемент $v \in V$ отождествляется с операцией
$$v \cdot \omega = v \wedge \omega - v \lrcorner \omega,$$
где $\wedge$ — внешнее произведение, а $\lrcorner$ — свертка с вектором v (то есть дифференцирование $\Lambda^* V$ степени -1, такое, что для $\omega \in V$, $v \lrcorner \omega = b(v, \omega)$).

5. Пусть $e_n, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ (со стандартной евклидовой структурой). Рассмотрим линейный оператор $L : Cl_n \to Cl_n$:
$$L(\varphi) = -\sum_{k=1}^{n} e_i \cdot \varphi \cdot e_i.$$
Докажите, а) что L корректно определён (не зависит от выбора ортобазиса); б) при линейном изоморфизме $Cl_n = \Lambda^* \mathbb{R}^n$, оператор $\widetilde{L} = \alpha \circ L$ задается формулой:
$$\widetilde{L}_{|\Lambda^p \mathbb{R}^n} = (n - 2p)\,\mathrm{Id}$$

6. Докажите, что

   a) алгебра Ли $\mathfrak{spin}_n$ группы $Spin_n \subset Cl_n^0$ может быть отождествлена с образом $\Lambda^2\mathbb{R}^n$ при отождествлении $Cl_n = \Lambda^*\mathbb{R}^n$;

   b) образ элемента $v \cdot w \in \mathfrak{spin}_n \subset Cl_n^0$ при изоморфизме алгебр Ли $\widetilde{ad} : \mathfrak{spin}_n \to \mathfrak{so}_n = \Lambda^2\mathbb{R}^n$, индуцированным накрывающим отображением $\widetilde{Ad} : Spin_n \to SO_n(\mathbb{R})$, равен $2v \wedge w$, где $v \wedge w \in Mat_n(\mathbb{R}^n)$, $(v \wedge w)(x) = b(v,x)w - b(w,x)v$.

7. Докажите изоморфизмы следующих групп Ли:

   a) $Spin_3 \cong SU_2$,

   b) $Spin_4 \cong Spin_3 \times Spin_3$,

   c) $Spin^0_{2,1} \cong SL_2(\mathbb{R})$,

   d) $Spin^0_{3,1} \cong SL_2(\mathbb{C})$.

   Здесь G^0 — компонента связности единицы группы G.

8. Докажите, что образ градуированного Cl_n-модуля $W = W^0 \oplus W^1$ при конструкции Атьи-Ботта-Шапиро соответствует тривиальному расслоению на $S^n = D^n \bigcup_{S^{n-1}} D^n$, если W получается индукцией при вложении $Cl_n \to Cl_{n+1}$ из градуированного модуля над Cl_{n+1} (расслоение над сферой можно получить, «склеивая» между собой тривиальные расслоения $D^n \times W^0$, $D^n \times W^1$ на границе дисков при помощи изоморфизма $S^{n-1} \times W^0 \to S^{n-1} \times W^1$ из конструкции Атьи-Ботта-Шапиро).