Топология и дифференциальные формы

Листок №6

Задача 6.1: Докажите, что у компактного кэлерова многообразия нечётные числа Бетти чётны, а чётные числа Бетти ненулевые (в пределах размерности многообразия).

Задача 6.2: Пусть G — компактная группа Ли. Докажите, что на G существует биинвариантная метрика (и, соответственно, биинвариантная форма объёма).

Задача 6.3: Пусть G — группа Ли такая, что $[G,G]=G$. Докажите, что на G существует биинвариантная форма старшей степени.

Задача 6.4: Докажите, что на гиперболической (то есть, рода больше 1) римановой поверхности не существует такой метрики, что произведение двух гармонических форм гармонично.

Задача 6.5: Пусть V и W это два представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Постройте действие $\mathfrak{g}$ на $V\otimes W$, на $\mathrm{Hom}_{Vect}(V,W)$, на $\Lambda^k(V)$ и на $\mathrm{Sym}^k(V)$. Покажите, что действие $\mathfrak{g}$ на $\Lambda^{dim\,\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^*)$ задаётся следом коприсоединённого представления $v\mapsto \mathrm{Tr}(ad_v^*)$.

Задача 6.6: Пусть размерность $\mathfrak{g}$ равна n. Докажите, что пространства $H^i(\mathfrak{g},k)=H^i(\mathfrak{g})$ и $H^{n-i}(\mathfrak{g},\Lambda^n(\mathfrak{g}^*))$ двойственны друг другу.

Задача 6.7: Покажите, что для нильпотентной алгебры Ли старшая внешняя степень коприсоединённого представления тривиальна.

Задача 6.8: Пусть $X:=(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\sim$, где отношение эквивалентности порождено условием $z\sim 2z$. Докажите, что X это комплексное многообразие (оно называется *многообразием Хопфа*. Покажите, что X диффеоморфно $S^{2n-1}\times S^1$. Покажите, что X некэлерово.

Задача 6.9: Пусть V это векторное пространство (над полем k характеристики ноль) размерности $2n$ и пусть $\omega\in\Lambda^2(V^*)$ это невырожденная кососимметрическая 2-форма на V. Положим $\mathcal{H}:=\mathcal{H}_{V,\omega}=V\oplus k$. Обозначим базисный элемент в одномерном пространстве k через $\hbar$. Определим скобку $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ по правилам $[v,w]=\omega(v,w)\hbar$ и $[\hbar,v]=0$ для $v,w\in V$. Докажите, что эта скобка задаёт структуру алгебры Ли. Она называется *алгеброй Гейзенберга*. Покажите, что алгебра Гейзенберга нильпотентна. Вычислите её когомологии вместе с умножением на них. Вычислите какую-нибудь нетривиальную тройную операцию Масси.

Задача 6.10: Вычислите когомологии алгебр Ли $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{gl}_2$ и $\mathfrak{sl}_3$ с тривиальными коэффициентами.

Задача 6.11: Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Назовём её дифференцированием такое линейное отображение $D:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$, что $D([x,y])=[Dx,y]+[x,Dy]$. Докажите, что присоединённое отображение $ad_x: y\mapsto[x,y]$ является дифференцированием. Такие дифференцирования называются *внутренними*. Покажите, что $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ это пространство всех дифференцирований $\mathfrak{g}$ фактор по внутренним.

Задача 6.12: Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и пусть $c\in CE^2(\mathfrak{g})$ — 2-коцикл. Рассмотрим пространство $L:=\mathfrak{g}\oplus k$. Обозначим базисный элемент в одномерном пространстве k через $\hbar$. Определим скобку $L\otimes L\longrightarrow L$ по правилам по правилам $[v,w]=[v,w]\oplus c(v,w)\hbar$ и $[\hbar,v]=0$ для $v,w\in V$. Докажите, что эта скобка задаёт структуру алгебры Ли на L. Обозначим соответствующую алгебру Ли как L_c. Докажите, что если c и c' когомологичны, то алгебры Ли L_c и $L_{c'}$ изоморфны.