Конечные поля и комплексные числа.

Задача 1. Разделите с остатком многочлен $f(x)$ на $g(x)$ над полем $\Bbbk$ и найдите обратный к $f(x)$ в кольце вычетов $\Bbbk[x]/(g(x))$, если таковой существует.
а) $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $f(x) = x^5 + x^6 + 1$, $g(x) = x + 2$;
б) $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$;
в) $\Bbbk = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^7 + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$;
г) $\Bbbk = \mathbb{F}_4 := \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$, $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$;
д) $\Bbbk = \mathbb{F}_4 := \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$, $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x^2 + [\alpha]x + 1$.

Задача 2. Классифицируйте кольца вида $\mathbb{R}[x]/(ax^2+bx+c), a, b, c \in \mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма.

Задача 3. Пусть $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$ — поле из четырёх элементов, которые мы обозначим $\{0, 1, [\alpha], [\alpha + 1]\}$. Найдите все делители нуля и все обратимые элементы в кольцах
а) $\mathbb{F}_4[x]/(x^2 + [\alpha]x + 1)$; **б)** $\mathbb{F}_4[x]/(x^2 + [\alpha + 1]x + [\alpha])$.

Задача 4. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле характеристики p и

$$\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}, x \to x^p,$$

— *гомоморфизм Фробениуса.* Приведете два примера бесконечных полей характеристики p таких, что в первом случае φ биективен, а во втором — нет.

Задача 5. Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле. Докажите, что любая функция $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ является многочленом. Приведите пример двух различных многочленов, задающих одинаковую функцию.

Задача 6. При каких q_1, q_2 существует ненулевой гомоморфизм $\mathbb{F}_{q_1} \to \mathbb{F}_{q_2}$?

Определение. Неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ степени d называется *примитивным*, если среди его корней в $\mathbb{F}_{p^d}$ есть первообразный корень.

Задача 7. а) Докажите, что приведённый примитивный многочлен делит $1 - x^{p^n-1}$, но не делит $1 - x^j$, для $j < p^n - 1$.
б) Докажите, что все корни f — первообразные корни. Докажите, что количество примитивных многочленов равно $\dfrac{\varphi(p^d - 1)}{d}$.

Задача 8. *Последовательность де Брёйна* с параметрами $(n + 1, m)$ — это последовательность длины $(n + 1)^m$ из символов $0, 1, \ldots, n$, которая содержит в качестве подпоследовательности любую последовательность[1] длины m при записи по кругу.
Например, последовательность 221201100 является такой последовательностью для $m = n = 2$. Цель задачи — построить последовательность де Брёйна для $n + 1 = p$ (в частности, $p = 2$).
Пусть $s_0 = 1$, $s_{-1} = \ldots s_{-p+1} = 0$. Будем строить (бесконечную) последовательность по правилу

$$s_i = a_1 s_{i-1} + \ldots + a_n s_{i-n} \mod p,$$

где $a_i = 0, \ldots, p - 1$.
а) Докажите, что первая повторяющаяся последовательность это $s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$.
б) Пусть $P(x) = 1 - a_1 x - \ldots - a_n x^n \in \mathbb{Z}_p[x]$. Докажите, что $P(x)$ делит $1 - x^k$ тогда и только тогда, когда k — кратное периода последовательности.
в) Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ — примитивный многочлен со свободным членом равным единице. Докажите, что период последовательности равен $p^n - 1$. Объясните как из полученной последовательности получить последовательность де Брёйна. Сколько различных последовательностей де Брёйна можно получить этим способом?
г) Докажите, что $P(x) = 1 + x + x^4 \in \mathbb{Z}_2[x]$ примитивный и постройте соответствующую последовательность де Брёйна.

[1]… из тех же символов

Задача 9. Найдите модуль и аргумент следующих комплексных чисел: **а)** $1+i$ и $1-i\sqrt{3}$;
б) $\sin\alpha + i\cos\alpha$ и $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; **в)** $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

Задача 10. Вычислите **а)** $(1+i\sqrt{3})^{150}$ и $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; **б)** $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^k$.

Задача 11. Решите уравнения **а)** $z^2=i$ и $z^2=5-12i$; **б)** $z^2+(2i-7)z+13-i=0$.

Задача 12. **а)** Выразите $\sin^4\varphi$ и $\cos^5\varphi$ через первые степени синусов и косинусов от кратных аргументов. **б)** Выразите $\sin nx$ и $\cos nx$, как многочлены от $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 13. **а)** Докажите, что множество решений уравнения $z\bar{z}=r^2$ есть окружность с центром в нуле и радиуса r. Выпишите уравнение окружности с центром в точке a и радиуса r.
б) Докажите, что комплексные точки a,b,c,d лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ является вещественным числом.

Задача 14. Вычислите **а)** сумму **б)** произведение m-ых степеней всех корней степени n из единицы.