Степенные ряды, поле частных.

Задача 1. Найдите явное выражение для коэффициентов степенных рядов:
а) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; **б)** $\dfrac{1}{x^3-x^2-x+1}$; **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$; **г)** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Задача 2. Найдите первообразную и 2023-ю производную от **а)** $\dfrac{x^4}{1+x^2}$; **б)** $\dfrac{1+2x}{1-3x-4x^2}$.

Задача 3. Найдите явное выражения для k-ого члена последовательности заданной рекуррентно.
а) $a_0=1$, $a_1=-1$ и $a_k=2a_{k-1}-a_{k-2}$; **б)** $a_0=-5$, $a_1=4$, $a_2=88$ и $a_n=6a_{n-1}-12a_{n-2}+8a_{n-3}$;
в) $a_0=4$, $a_1=12$ и $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+2^n$.

Задача 4. Найдите производящую функцию последовательности **а)** $1\cdot 2, 2\cdot 3, \ldots$; **б)** $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$;
в) $a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots$

Задача 5. *Число Каталана* C_n — число способов расставить n пар скобок в выражении $a_0a_1\ldots a_n$. В частности, $c_0=1$ (соглашение), $c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=5$.

а) Докажите, что $c_n=c_0c_{n-1}+\ldots+c_{n-1}c_0$.

б) Пусть $c(x)=\sum_{k\leq 0}c_kx^k$. Докажите, что $c(x)^2=\frac{c(x)-1}{x}$

в) Найдите явную формулу для чисел Каталана.

г) В выпуклом n-угольнике проводят максимально возможное число диагоналей так, чтобы они нигде не пересекались, кроме вершин. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 6. **[Теорема Эйлера о пятиугольных числах]** *n-ым пятиугольным числом* называется число $P_n=\frac{3n^2-n}{2}, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Пусть $p(n)$ — число разбиений числа $n\geq 1$, $p(0)=1$. Через $p_e(n)$ и $p_o(n)$ обозначим число разбиений n на, соответственно, чётное и нечётное число *различных* слагаемых. Пусть

$$P(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)t^n\in\mathbb{Q}[[t]].$$

Докажите, что **а)** $P(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-t^k)}$;

б) $\frac{1}{P(t)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(p_e(n)-p_o(n))t^n$;

в*) $\frac{1}{P(t)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(t^{P_k}+t^{P_{-k}})$.

г*) $p(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(p\big(n-P_k\big)+p\big(n-P_{-k}\big)\Big)$ и вычислите $p(10)$.

Задача 7. **а)** Пусть $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\in\mathbb{Q}[[x]]$. Докажите, что $e^x\notin\mathbb{Q}(x)$.
б) Предъявите такой ряд $f(x)\in\mathbb{Z}[[x]]$ с коэффициентами из нулей и единиц, что $f(x)\notin\mathbb{Q}(x)$.

Задача 8. Опишите поле частных кольца **а)** $\mathbb{Z}[i]$; **б)** $\mathbb{Z}[x]$; **в)** $\mathbb{Q}[x]$ **г)** $\mathbb{Q}[[x]]$.

д) Докажите, что поле частных $\mathbb{Z}[[x]]$ является подполем в поле $\mathbb{Q}((x))$, но не совпадает с ним.

е*) Докажите, что поле частных кольца $\Bbbk[[x,y]]$ является подполем в поле $\Bbbk((x))((y))$, но не совпадает с ним.

Задача 9. Пусть $N(d)$ — число неприводимых многочленов степени d в $\mathbb{F}_p[x]$ со старшим коэффициентом 1. **а)** Докажите, что

$$\frac{1}{1-pt}=\prod_{d\geq 1}\left(\frac{1}{1-t^d}\right)^{N(d)}.$$

б) Выведите из этого равенство $p^n=\sum_{d|n}dN(d)$. **в)** Пользуясь задачей 11 из Листка 1, найдите явную формулу для $N(d)$ и докажите, что $N(d)>0$ для любого $d>0$.