НМУ, Алгебра-3
Листок 3. 25.09.2022

Задача 1.
Пусть A — коммутативное кольцо, N — его нильрадикал. Докажите, что следующие три условия эквивалентны:

i) В A есть только один простой идеал.

ii) Все необратимые элементы A — нильпотенты.

iii) A/N — поле.

Задача 2.
Пусть A — коммутативное кольцо. Докажите, что нильрадикал в $A[x]$ совпадает с радикалом Джекобсона.
Задача 3.
Пусть $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ — последовательность модулей над A. Докажите, что она точна тогда и только тогда, когда для любого модуля M точна последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}(M, N'')$$

Задача 4.
Пусть P — модуль над кольцом A и функтор $N \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, M)$ точен. Докажите, что для любого гомоморфизма модулей $f : P \to M''$ и сюръективного гомоморфизма $g : M \to M''$ найдется $h : P \to M$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "g"] & M'' \end{tikzcd}$$

коммутативна.
Задача 5.
Кольцо A называется абсолютно плоским, если всякий A-модуль плоский. Докажите, что следующие три условия эквивалентны:

а) A абсолютно плоское

б) Всякий главный идеал идемпотентен

в) Всякий конечнопорожденный идеал — прямое слагаемое в A

Задача 6.
Пусть X — бесконечное компактное хаусдорфово пространство, а $C(X; \mathbb{R})$ — кольцо непрерывных функций $X \to \mathbb{R}$. Разложим ли нулевой идеал в этом кольце?