НМУ, Алгебра-3
Листок 7. 20.11.2023

Задача 1.
Пусть M и N — конечнопорожденные модули над кольцом главных идеалов R. Вычислите $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$.

Задача 2.
Пусть $\xi : 0 \to B \to X \to A \to 0$ — расширение R-модулей. Пусть $\delta : \mathrm{Hom}(B,B) \to \mathrm{Ext}^1_R(A,B)$ — граничный гомоморфизм в длинной точной последовательности, связанной с $\mathrm{Ext}^*(-,B)$. Определим $\Theta(\xi) = \delta(id_B)$. Докажите, что ξ расщепляется тогда и только тогда, когда $\Theta(\xi) = 0$.

Задача 3.
Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория и

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & A_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & A''_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B'_\bullet \arrow[r] & B_\bullet \arrow[r] & B''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

— коммутативная диаграмма в $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ с точными строками. Докажите, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n(B') \arrow[r] & H_n(B'') \arrow[r] & H_{n-1}(B') \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd},$$

у которой строчки — соответствующие точные последовательности гомологий.

Задача 4.
Пусть R — кольцо, $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ — морфизм комплексов модулей над R. Зададим комплекс $\Delta(f)$ так: $\Delta(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n$ и $d_n(x,y) = (-d_{n-1}(x), d_n(y) - f_{n-1}(x))$. Докажите, что f — квазиизоморфизм тогда и только тогда, когда $H_n(\Delta(f)) = 0$

Задача 5.
Вычислите

а) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Z})$ для простого p.

б) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

в) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$, где A — произведение бесконечного числа копий $\mathbb{Z}$.

Задача 6.
Пусть $F(X)$ — свободная группа на множестве образующих X. Вычислите $H^i(F(X), \mathbb{Z})$ и $H_i(F(X), \mathbb{Z})$.