НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 5. 11 октября 2023 г.

Производная функции

1. Найдите производную функции $f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+100)$ в точке $x = -1$.

2. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции нечетна, а нечетной – четна.

3. Придумайте функцию f на прямой, которая непрерывна только в одной точке и в ней дифференцируема.

4. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и дифференцируема в этой точке, а $g(y)$ определена в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и дифференцируема в y_0. Докажите, что их композиция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ определена в окрестности x_0, дифференцируема в x_0 и $(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

5. Пусть $f : U \to V$ и $f^{-1} : V \to U$ взаимно обратные и непрерывные в точках $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0) \in V$ соответственно. Докажите, что, если $\exists\, f'(x_0) \neq 0$, то $f^{-1}(y)$ дифференцируема в y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.

6. Вычислите пределы: (а) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$; (б) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$; (в) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$; (г) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

7. Найдите производные функций a^x, $\log_a x$, x^α.

8. Найдите $\max_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

9. Пусть функция f дифференцируема на $[a, b]$. Докажите, что ее производная на $[a, b]$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$. (Указание: рассмотрите случай, когда $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки.)

10. На плоскости в точке $(p/2, 0)$ находится источник света. Докажите, что лучи, выпущенные из источника, после отражения от параболического зеркала $y^2 = 2px$ распространяются параллельно друг другу.

Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется выпуклой вниз (вверх), если для любых двух точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любых положительных α_1, α_2 таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено следующее неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad \left(f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right).$$

Если при всех $x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2$ выполнены строгие неравенства, то говорят о строгой выпуклости.

11. Докажите, что график выпуклой вниз функции лежит выше любой касательной к нему.

12. Докажите, что выпуклая вниз функция непрерывна в любой точке своей области определения (за исключением, возможно, крайних точек).

13. (а) Докажите, что функция $x \mapsto e^x$ выпукла вниз.

(б) Выведите отсюда неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

14*. Постройте пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции.