$\Xi: \xi_1, \ldots, \xi_n \in [0,1]$

$$D(\Xi) = \sup_{\gamma\in[0,1]} \left|\#\{i : \xi_i \le \gamma\} - \gamma n\right|$$

Книга

Кейперс – Нидеррейтер

"Равномерное распределение последовательностей"

Это ещё не для семинара.

Это ответ на вопрос.

А теперь начинаем:

30 сентября 2023.

Диофантовы приближения.

Мощевитин продолжает рассказ о сумме $\sum_{k=1}^{t} f(k\alpha)$

Теор Marstrand (1970г).

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ открытое мн-во $\Omega \subset [0,1]$ такое что $\mu(\Omega) < \varepsilon$ и

$$\forall \alpha \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} \chi_\Omega(k\alpha) = 1 \ne$$
$$= \int_0^1 \chi_\Omega(x)\,dx.$$

$\chi_\Omega(x) \notin C[0,1]$

$\chi_\Omega(x)$ – 1-период. ф. которая совпадает с хар. функц. на отрезке $[0,1]$

$\chi_\Omega(x) \in L^1[0,1]$.

$$f(x) = \chi_\Omega(x) - \mu\Omega$$

Продолжаем запланированный рассказ

Биркгоф $S^t = \bar{o}(t)$, $t \to \infty$

$n=1$

Теор 1 (Кочергин)

Дано: $\alpha \in \mathbb{R}^n$ вполне ирр.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вм. лин. нез. вместе с 1

$\sigma_r \downarrow 0$, $r \to \infty$

Тогда $\exists f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — 1-период по x_i $\forall i$, $\int f(x)\,dx = 0$

$\exists t_0 \in \mathbb{Z}_+$ — $\max\limits_{x \in \mathbb{T}^n} |f(x)| \le \pi$

f непрерывна

$\forall t \ge t_0$ $\quad S_f^t(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{t-1} f(k\alpha) \ge t\sigma_t$

$$S_f^t(\alpha, x) = \sum f(k\alpha + x)$$

Кочергин: $n=1$ кроме $x=0$

можно для $x \in D$ $\quad HD(D) = 1$

$x \mapsto x + \alpha$

---

a_j: $a_j \ge 0$ $\quad \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = 1$.

Θ $\quad F_r(x) = \dfrac{|\sin \pi (m_r \cdot x)|}{\zeta_r}$

$$\psi(t) = \min_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ 1 \le \max|m_i| \le t}} \|m_1\alpha_1 + \dots + m_n\alpha_n\|$$

$\checkmark \quad M_\nu = \max|m_{i\nu}|$

$(m_{1\nu} \dots m_{n\nu}) \subset \mathbb{Z}^n$

$\zeta_\nu = \|m_{1\nu}\alpha_1 + \dots + m_{n\nu}\alpha_n\|$

$\|m_1 d_1 + \dots + m_n d\|$

$\max|m_i|$ $\qquad m_{i\nu} =$

$x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^n \qquad m_\nu \cdot x = \qquad q\alpha - p$

$$f_\nu(x) = F_\nu(x+\alpha) - F_\nu(x) =$$

$$= \frac{|\sin\pi(m_\nu(x+\alpha))| - |\sin\pi(m_\nu \cdot x)|}{\zeta_\nu} =$$

$$= \frac{|\sin(\pi(m_\nu x) + \pi\zeta_\nu)| - |\sin\pi(m_\nu x)|}{\zeta_\nu}$$

$$\boxed{\forall \ell \qquad |f_\nu(x)| \le \pi}$$

$f(z) = \sin\pi z$

$x, \; x+\zeta$

$x = (m_\nu \cdot x) \qquad \zeta : \zeta_\nu$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{t-1} f_\nu(k\alpha) = F_\nu(t\alpha)}$$

Определим последовательность r_k $\quad k = 1, 2, 3, \dots$

$k \longmapsto \nu_k$ выберем так, чтобы

$$\leadsto \quad \Gamma_k = \left[\frac{1}{2\varepsilon_{\nu_k}}\right]$$

Для выполнено

при $x = t\alpha$ $\exists$ ~ опред. и почему

$$\sigma_{\Gamma_k} \le \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j F_{\nu_j}(x); \quad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_{\nu_j}(x)$$

<u>Упр</u> $\quad f(x) \in C[\mathbb{T}^1]$

$$\sum_{k=0}^{t-1} f(k\alpha) = F(t\alpha)$$

$$f(k\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_{\nu_j}(k\alpha)$$

$$\sum_{k=0}^{t-1} f(k\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j F_{\nu_j}(t\alpha)$$

Там где $F(x)$ определена (там) $F(x) \geq 0$

$t \in \mathbb{Z}$

$$F(t\alpha) \geq \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j F_{\nu_j}(t\alpha) =$$

$$= \sum^{\infty} a_j \frac{|\sin(\pi t (m_\nu \alpha))|}{\ldots} =$$

$$\sum_{j=k+1} \qquad \tau_{\nu_j}$$

$$= \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \frac{|\sin(\pi t \tau_{\nu_j})|}{\tau_{\nu_j}} \geq$$

Пусть $t \to k$ $\boxed{r_k \leq t < r_{k+1} < \frac{1}{2\tau_{\nu_{k+1}}}}$

$$t\tau_{\nu_j} \leq t\tau_{\nu_{k+1}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\geq \sum \frac{a_j}{\tau_{\nu_j}} 2t\tau_{\nu_j} \geq$$

нер-во вогнутости $\qquad |\sin \pi x| \geq 2x.$

$$\geq 2t \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \geq 2t\sigma_{r_k} \geq 2t\sigma_t$$

$$r_k \leq t < r_{k+1}$$

$$\sigma_{r_k} > \sigma_t$$

$$F(\alpha t) = \sum_{k=1}^{t-1} f(k\alpha) \geq 2t\sigma_t$$

Теор Вейл

$$\int f(x)\,dx = 0$$

Вопрос $\forall \alpha \ \exists f$

$\exists$ и $f \ \forall \alpha$

Так нельзя

Теор $n = 1$ $\quad \psi(t) \to \infty$, $t \to \infty$

$\forall f \in C[\mathbb{T}] \quad \exists \alpha \notin \mathbb{Q}$

$\int f\,dx = 0$

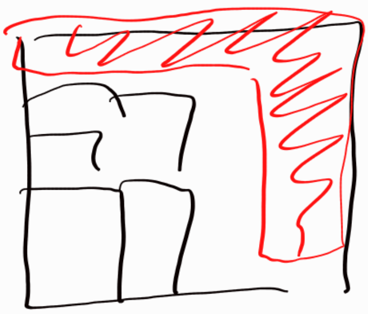
$$\lim_{t \to \infty} \frac{S_\delta^t(\alpha)}{\psi(t)} = 0$$

$$S_\delta^t(\alpha) < \varepsilon\, \psi(t)$$

Задача Если $n \geq 2$ то

"константа" κ [illegible]

lim $\dfrac{S^t_f(x)}{\log t \cdot \psi(t)}$.



$\dfrac{1}{k^n}$ k^{n+1} $\dfrac{1}{k}$

$\sum \dfrac{1}{k}$