Локализации и нётеровость

Александр Калмынин

18 сентября 2023

1. Локализации

Начиная с данной лекции, мы немного поговорим о результатах коммутативной алгебры. В частности, сегодня мы обсудим локализации колец и модулей, а также нётеровы кольца.

1. Локализации

Начиная с данной лекции, мы немного поговорим о результатах коммутативной алгебры. В частности, сегодня мы обсудим локализации колец и модулей, а также нётеровы кольца. Часть вещей, которые появятся сегодня, будут напоминанием из прошлых семестров. Например, мы поговорим о решении одного из упражнений из листков первого семестра.

1. Локализации

Начиная с данной лекции, мы немного поговорим о результатах коммутативной алгебры. В частности, сегодня мы обсудим локализации колец и модулей, а также нётеровы кольца. Часть вещей, которые появятся сегодня, будут напоминанием из прошлых семестров. Например, мы поговорим о решении одного из упражнений из листков первого семестра. Пусть A — коммутативное кольцо. *Мультипликативным подмножеством* $S \subset A$ называется мультипликативный подмоноид в A, то есть множество S такое, что

1) $1 \in S$

1. Локализации

Начиная с данной лекции, мы немного поговорим о результатах коммутативной алгебры. В частности, сегодня мы обсудим локализации колец и модулей, а также нётеровы кольца. Часть вещей, которые появятся сегодня, будут напоминанием из прошлых семестров. Например, мы поговорим о решении одного из упражнений из листков первого семестра. Пусть A — коммутативное кольцо. *Мультипликативным подмножеством* $S \subset A$ называется мультипликативный подмоноид в A, то есть множество S такое, что

1) $1 \in S$
2) Если $x, y \in S$, то $xy \in S$.

1. Локализации

Начиная с данной лекции, мы немного поговорим о результатах коммутативной алгебры. В частности, сегодня мы обсудим локализации колец и модулей, а также нётеровы кольца. Часть вещей, которые появятся сегодня, будут напоминанием из прошлых семестров. Например, мы поговорим о решении одного из упражнений из листков первого семестра. Пусть A — коммутативное кольцо. *Мультипликативным подмножеством* $S \subset A$ называется мультипликативный подмоноид в A, то есть множество S такое, что

1) $1 \in S$
2) Если $x, y \in S$, то $xy \in S$.

Например, для $\mathbb{Z}$ в качестве мультипликативного подмножества можно взять натуральные числа, имеющие в своем разложении на простые множители только простые числа $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ для любого набора простых чисел p_i.

1. Локализации

По всякому мультипликативному подмножеству S можно построить кольцо $S^{-1}A$ — кольцо частных A по S. А именно, рассмотрим отношение эквивалентности на $A \times S$: пары (a, s) и (a', s') объявим эквивалентными, если существует s_1 из S такое, что $s_1 s' a = s_1 s a'$. Класс эквивалентности, содержащий (a, s), обозначается a/s, а множество всех классов эквивалентности — $S^{-1}A$.

1. Локализации

По всякому мультипликативному подмножеству S можно построить кольцо $S^{-1}A$ — кольцо частных A по S. А именно, рассмотрим отношение эквивалентности на $A \times S$: пары (a, s) и (a', s') объявим эквивалентными, если существует s_1 из S такое, что $s_1 s' a = s_1 s a'$. Класс эквивалентности, содержащий (a, s), обозначается a/s, а множество всех классов эквивалентности — $S^{-1}A$. Если в S лежит 0, то $S^{-1}A$ состоит из одного элемента $0/1$. На $S^{-1}A$ структура кольца вводится при помощи сложения и умножения дробей:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} \text{ и } \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}.$$

1. Локализации

По всякому мультипликативному подмножеству S можно построить кольцо $S^{-1}A$ — кольцо частных A по S. А именно, рассмотрим отношение эквивалентности на $A \times S$: пары (a, s) и (a', s') объявим эквивалентными, если существует s_1 из S такое, что $s_1 s' a = s_1 s a'$. Класс эквивалентности, содержащий (a, s), обозначается a/s, а множество всех классов эквивалентности — $S^{-1}A$. Если в S лежит 0, то $S^{-1}A$ состоит из одного элемента $0/1$. На $S^{-1}A$ структура кольца вводится при помощи сложения и умножения дробей:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} \text{ и } \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}.$$

Проверка корректной определенности этих операций осуществляется тривиально, но давайте проверим корректность для сложения. Предположим, что выполнены равенства $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a}{s}$ и $\frac{a_1'}{s_1'} = \frac{a'}{s'}$.

1. Локализации

По всякому мультипликативному подмножеству S можно построить кольцо $S^{-1}A$ — кольцо частных A по S. А именно, рассмотрим отношение эквивалентности на $A \times S$: пары (a, s) и (a', s') объявим эквивалентными, если существует s_1 из S такое, что $s_1 s' a = s_1 s a'$. Класс эквивалентности, содержащий (a, s), обозначается a/s, а множество всех классов эквивалентности — $S^{-1}A$. Если в S лежит 0, то $S^{-1}A$ состоит из одного элемента $0/1$. На $S^{-1}A$ структура кольца вводится при помощи сложения и умножения дробей:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} \text{ и } \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}.$$

Проверка корректной определенности этих операций осуществляется тривиально, но давайте проверим корректность для сложения. Предположим, что выполнены равенства $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a}{s}$ и $\frac{a_1'}{s_1'} = \frac{a'}{s'}$. Хотим установить

$$\frac{s_1' a_1 + s_1 a_1'}{s_1 s_1'} = \frac{s' a + s a'}{ss'}$$

Итак, существуют $s_2, s_3 \in S$ такие, что $s_2(sa_1 - s_1a) = 0$ и $s_3(s'a'_1 - s'_1a') = 0$. Умножим первое из этих равенств на $s_3s's'_1$, а второе на s_2ss_1 и сложим, получим

Итак, существуют $s_2, s_3 \in S$ такие, что $s_2(sa_1 - s_1a) = 0$ и $s_3(s'a'_1 - s'_1a') = 0$. Умножим первое из этих равенств на $s_3s's'_1$, а второе на s_2ss_1 и сложим, получим

$$0 = s_2s_3(s's'_1(sa_1 - s_1a) + ss_1(s'a'_1 - s'_1a')) =$$

$$= s_2s_3(ss'(s'_1a_1 + s_1a'_1) - s_1s'_1(s'a + sa')),$$

что и требовалось доказать.

1. Локализации

Итак, существуют $s_2, s_3 \in S$ такие, что $s_2(sa_1 - s_1 a) = 0$ и $s_3(s'a'_1 - s'_1 a') = 0$. Умножим первое из этих равенств на $s_3 s' s'_1$, а второе на $s_2 s s_1$ и сложим, получим

$$0 = s_2 s_3 (s' s'_1 (sa_1 - s_1 a) + s s_1 (s' a'_1 - s'_1 a')) =$$

$$= s_2 s_3 (s s' (s'_1 a_1 + s_1 a'_1) - s_1 s'_1 (s' a + s a')),$$

что и требовалось доказать. Легко устроить гомоморфизм колец $\phi_S : A \to S^{-1}A$, а именно

$$\phi_S(a) = \frac{a}{1}.$$

Очевидно, что образ всякого $s \in S$ при таком гомоморфизме обратим, поскольку $\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{s}$.

Итак, существуют $s_2, s_3 \in S$ такие, что $s_2(sa_1 - s_1 a) = 0$ и $s_3(s'a'_1 - s'_1 a') = 0$. Умножим первое из этих равенств на $s_3 s' s'_1$, а второе на $s_2 s s_1$ и сложим, получим

$$0 = s_2 s_3 (s' s'_1 (sa_1 - s_1 a) + s s_1 (s' a'_1 - s'_1 a')) =$$

$$= s_2 s_3 (s s' (s'_1 a_1 + s_1 a'_1) - s_1 s'_1 (s' a + s a')),$$

что и требовалось доказать. Легко устроить гомоморфизм колец $\phi_S : A \to S^{-1} A$, а именно

$$\phi_S(a) = \frac{a}{1}.$$

Очевидно, что образ всякого $s \in S$ при таком гомоморфизме обратим, поскольку $\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{s}$. Рассмотрим категорию, в которой объекты — это гомоморфизмы колец $f : A \to B$ такие, что $f(s)$ обратимо для всех $s \in S$, а морфизм между $f : A \to B$ и $f' : A \to B'$ — это гомоморфизм $h : B \to B'$ такой, что $g \circ f = f'$, то есть соответствующая диаграмма коммутативна.

1. Локализации

В такой категории морфизм ϕ_S оказывается универсальным объектом. Действительно, если $f : A \to B$, то можно задать $S^{-1}f : S^{-1}A \to B$ формулой $S^{-1}f(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$. Легко понять, что это дает морфизм $\phi_S \to f$.

1. Локализации

В такой категории морфизм ϕ_S оказывается универсальным объектом. Действительно, если $f : A \to B$, то можно задать $S^{-1}f : S^{-1}A \to B$ формулой $S^{-1}f(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$. Легко понять, что это дает морфизм $\phi_S \to f$. Отображение хорошо определено, поскольку если $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, то для некоторого s_1 верно $s_1 s' a = s_1 s a'$, откуда $f(s_1)f(s')f(a) = f(s_1)f(s)f(a')$, так что в силу обратимости $f(a)f(s)^{-1} = f(a')f(s')^{-1}$. Единственность получается автоматически.

В такой категории морфизм ϕ_S оказывается универсальным объектом. Действительно, если $f : A \to B$, то можно задать $S^{-1}f : S^{-1}A \to B$ формулой $S^{-1}f(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$. Легко понять, что это дает морфизм $\phi_S \to f$. Отображение хорошо определено, поскольку если $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, то для некоторого s_1 верно $s_1 s' a = s_1 s a'$, откуда $f(s_1)f(s')f(a) = f(s_1)f(s)f(a')$, так что в силу обратимости $f(a)f(s)^{-1} = f(a')f(s')^{-1}$. Единственность получается автоматически.

Приведем три простых примера локализаций.

1) Если $S = A^*$ — группа обратимых элементов, то $S^{-1}A \simeq A$, то есть ϕ_S — изоморфизм.

В такой категории морфизм ϕ_S оказывается универсальным объектом. Действительно, если $f : A \to B$, то можно задать $S^{-1}f : S^{-1}A \to B$ формулой $S^{-1}f(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$. Легко понять, что это дает морфизм $\phi_S \to f$. Отображение хорошо определено, поскольку если $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, то для некоторого s_1 верно $s_1 s' a = s_1 s a'$, откуда $f(s_1)f(s')f(a) = f(s_1)f(s)f(a')$, так что в силу обратимости $f(a)f(s)^{-1} = f(a')f(s')^{-1}$. Единственность получается автоматически.

Приведем три простых примера локализаций.

1) Если $S = A^*$ — группа обратимых элементов, то $S^{-1}A \simeq A$, то есть ϕ_S — изоморфизм.
2) Если A — целостное кольцо и $S = A \setminus \{0\}$, то $S^{-1}A = Quot(A)$ — поле частных.

В такой категории морфизм ϕ_S оказывается универсальным объектом. Действительно, если $f : A \to B$, то можно задать $S^{-1}f : S^{-1}A \to B$ формулой $S^{-1}f(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$. Легко понять, что это дает морфизм $\phi_S \to f$. Отображение хорошо определено, поскольку если $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, то для некоторого s_1 верно $s_1 s' a = s_1 s a'$, откуда $f(s_1)f(s')f(a) = f(s_1)f(s)f(a')$, так что в силу обратимости $f(a)f(s)^{-1} = f(a')f(s')^{-1}$. Единственность получается автоматически.
Приведем три простых примера локализаций.

1) Если $S = A^*$ — группа обратимых элементов, то $S^{-1}A \simeq A$, то есть ϕ_S — изоморфизм.
2) Если A — целостное кольцо и $S = A \setminus \{0\}$, то $S^{-1}A = Quot(A)$ — поле частных.
3) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в кольце A, тогда $S = A \setminus \mathfrak{p}$ — мультипликативное множество и $S^{-1}A := A_{\mathfrak{p}}$ — локальное кольцо, которое называется локализацией A в $\mathfrak{p}$ или локальным кольцом A в $\mathfrak{p}$.

1. Локализации

Пусть S — произвольное мультипликативное подмножество в A, $I(A)$ — множество идеалов A. Тогда имеется отображение

$$\psi_S : I(A) \to I(S^{-1}A),$$

которое задается так $\psi_S(\mathfrak{a}) = S^{-1}\mathfrak{a}$, то есть множество всех дробей вида $\frac{a}{s}$, где $a \in \mathfrak{a}$ и $s \in S$.

1. Локализации

Пусть S — произвольное мультипликативное подмножество в A, $I(A)$ — множество идеалов A. Тогда имеется отображение

$$\psi_S : I(A) \to I(S^{-1}A),$$

которое задается так $\psi_S(\mathfrak{a}) = S^{-1}\mathfrak{a}$, то есть множество всех дробей вида $\frac{a}{s}$, где $a \in \mathfrak{a}$ и $s \in S$. Данное отображение аддитивно, мультипликативно и сохраняет пересечения.

Пусть S — произвольное мультипликативное подмножество в A, $I(A)$ — множество идеалов A. Тогда имеется отображение

$$\psi_S : I(A) \to I(S^{-1}A),$$

которое задается так $\psi_S(\mathfrak{a}) = S^{-1}\mathfrak{a}$, то есть множество всех дробей вида $\frac{a}{s}$, где $a \in \mathfrak{a}$ и $s \in S$. Данное отображение аддитивно, мультипликативно и сохраняет пересечения. Также, если M — модуль, то $S^{-1}M$ строится так же, как и $S^{-1}A$, только числители дробей теперь лежат в M. Эквивалентно, $S^{-1}M = M \otimes_A S^{-1}A$.

2. Нётеровость

В этом разделе мы дадим напоминание о некоторых свойствах нётеровых модулей.

2. Нётеровость

В этом разделе мы дадим напоминание о некоторых свойствах нётеровых модулей. Пусть A — кольцо, а M — A-модуль. Мы говорим, что M нётеров, если выполнено одно из следующих трех эквивалентных условий

1) Каждый подмодуль M конечно порожден.
2) Всякая строго возрастающая цепочка подмодулей
$$M_1 \subset M_2 \subset \dots$$
конечна.
3) Каждое непустое множество подмодулей имеет максимальный элемент.

2. Нётеровость

В этом разделе мы дадим напоминание о некоторых свойствах нётеровых модулей. Пусть A — кольцо, а M — A-модуль. Мы говорим, что M нётеров, если выполнено одно из следующих трех эквивалентных условий

1) Каждый подмодуль M конечно порожден.
2) Всякая строго возрастающая цепочка подмодулей
$$M_1 \subset M_2 \subset \dots$$
конечна.
3) Каждое непустое множество подмодулей имеет максимальный элемент.

Докажем эквивалентность. $1 \implies 2$: рассмотрим строго возрастающую цепочку модулей M_i. Положим
$$N = \bigcup_i M_i.$$
Пусть N порожден элементами $n_1, \dots, n_m$. Ясно, что найдется такое r, что $n_i \in M_r$ для всех i.

2. Нётеровость

В этом разделе мы дадим напоминание о некоторых свойствах нётеровых модулей. Пусть A — кольцо, а M — A-модуль. Мы говорим, что M нётеров, если выполнено одно из следующих трех эквивалентных условий

1) Каждый подмодуль M конечно порожден.
2) Всякая строго возрастающая цепочка подмодулей
$$M_1 \subset M_2 \subset \dots$$
конечна.
3) Каждое непустое множество подмодулей имеет максимальный элемент.

Докажем эквивалентность. $1 \implies 2$: рассмотрим строго возрастающую цепочку модулей M_i. Положим
$$N = \bigcup_i M_i.$$
Пусть N порожден элементами $n_1, \dots, n_m$. Ясно, что найдется такое r, что $n_i \in M_r$ для всех i. Тогда $\langle n_1, \dots, n_m \rangle \subset M_r \subset N = \langle n_1, \dots, n_m \rangle$, так что второе включение является равенством.

2. Нётеровость

$2 \implies 3$: Пусть S — наше множество подмодулей. Рассмотрим подмодуль N_0. Если он не максимален, то найдется $N_1 \in S$ такой, что $N_0 \subsetneq N_1$.

2. Нётеровость

$2 \implies 3$: Пусть S — наше множество подмодулей. Рассмотрим подмодуль N_0. Если он не максимален, то найдется $N_1 \in S$ такой, что $N_0 \subsetneq N_1$. Если N_1 не максимален, то найдется $N_2 \in S$ такой, что $N_1 \subsetneq N_2$. Продолжая эту конструкцию, получаем бесконечную строго возрастающую цепочку подмодулей.

$2 \implies 3$: Пусть S — наше множество подмодулей. Рассмотрим подмодуль N_0. Если он не максимален, то найдется $N_1 \in S$ такой, что $N_0 \subsetneq N_1$. Если N_1 не максимален, то найдется $N_2 \in S$ такой, что $N_1 \subsetneq N_2$. Продолжая эту конструкцию, получаем бесконечную строго возрастающую цепочку подмодулей. Наконец, $3 \implies 1$. Пусть N — подмодуль в M, $a_0 \in N$. Если $\langle a_0 \rangle \neq N$, то найдется $a_1 \in N$, $a_1 \notin \langle a_0 \rangle$. Тогда рассмотрим $\langle a_0, a_1 \rangle$. Если этот модуль всё ещё не совпадает с N, то продолжим эту конструкцию.

$2 \implies 3$: Пусть S — наше множество подмодулей. Рассмотрим подмодуль N_0. Если он не максимален, то найдется $N_1 \in S$ такой, что $N_0 \subsetneq N_1$. Если N_1 не максимален, то найдется $N_2 \in S$ такой, что $N_1 \subsetneq N_2$. Продолжая эту конструкцию, получаем бесконечную строго возрастающую цепочку подмодулей. Наконец, $3 \implies 1$. Пусть N — подмодуль в M, $a_0 \in N$. Если $\langle a_0 \rangle \neq N$, то найдется $a_1 \in N$, $a_1 \notin \langle a_0 \rangle$. Тогда рассмотрим $\langle a_0, a_1 \rangle$. Если этот модуль всё ещё не совпадает с N, то продолжим эту конструкцию. Получится возрастающая цепочка подмодулей. Она должна содержать максимальный элемент, следовательно, данный процесс на каком-то шаге завершится и получим $N = \langle a_0, \dots, a_r \rangle$.

$2 \implies 3$: Пусть S — наше множество подмодулей. Рассмотрим подмодуль N_0. Если он не максимален, то найдется $N_1 \in S$ такой, что $N_0 \subsetneq N_1$. Если N_1 не максимален, то найдется $N_2 \in S$ такой, что $N_1 \subsetneq N_2$. Продолжая эту конструкцию, получаем бесконечную строго возрастающую цепочку подмодулей. Наконец, $3 \implies 1$. Пусть N — подмодуль в M, $a_0 \in N$. Если $\langle a_0 \rangle \neq N$, то найдется $a_1 \in N$, $a_1 \notin \langle a_0 \rangle$. Тогда рассмотрим $\langle a_0, a_1 \rangle$. Если этот модуль всё ещё не совпадает с N, то продолжим эту конструкцию. Получится возрастающая цепочка подмодулей. Она должна содержать максимальный элемент, следовательно, данный процесс на каком-то шаге завершится и получим $N = \langle a_0, \ldots, a_r \rangle$. Докажем несколько полезных утверждений о нётеровых модулях.

Утверждение 1

Пусть M — нётеров модуль над A. Тогда всякий подмодуль и всякий фактор модуль M нётеров.

Часть о подмодулях очевидна, например, из критерия 1). Пусть N — подмодуль M. Рассмотрим фактормодуль M/N.

2. Нётеровость

Часть о подмодулях очевидна, например, из критерия 1). Пусть N — подмодуль M. Рассмотрим фактормодуль M/N. Пусть $\overline{M_1} \subset \overline{M_2} \ldots$ — возрастающая цепочка подмодулей, а $\pi : M \to M/N$ — каноническая проекция. Ясно, что множества $M_i = \pi^{-1}(\overline{M_i})$ — подмодули в M, также образующие возрастающую цепочку.

2. Нётеровость

Часть о подмодулях очевидна, например, из критерия 1). Пусть N — подмодуль M. Рассмотрим фактормодуль M/N. Пусть $\overline{M_1} \subset \overline{M_2} \ldots$ — возрастающая цепочка подмодулей, а $\pi : M \to M/N$ — каноническая проекция. Ясно, что множества $M_i = \pi^{-1}(\overline{M_i})$ — подмодули в M, также образующие возрастающую цепочку. Если данная цепочка стабилизируется начиная с места r, то для $i \geq r$ имеем $M_i = M_r$, а значит $\overline{M_i} = \pi(M_i) = \pi(M_r) = \overline{M_r}$, что и доказывает нётеровость M/N.

Часть о подмодулях очевидна, например, из критерия 1). Пусть N — подмодуль M. Рассмотрим фактормодуль M/N. Пусть $\overline{M_1} \subset \overline{M_2} \ldots$ — возрастающая цепочка подмодулей, а $\pi : M \to M/N$ — каноническая проекция. Ясно, что множества $M_i = \pi^{-1}(\overline{M_i})$ — подмодули в M, также образующие возрастающую цепочку. Если данная цепочка стабилизируется начиная с места r, то для $i \geq r$ имеем $M_i = M_r$, а значит $\overline{M_i} = \pi(M_i) = \pi(M_r) = \overline{M_r}$, что и доказывает нётеровость M/N. Верно и обратное

Утверждение 2

Если N — подмодуль в M и оба модуля N и M/N нётеровы, то то же верно и для M.

Для каждого подмодуля $L \subset M$ рассмотрим пару подмодулей $(L \cap N, (L + N)/N)$ в N и M/N, соответственно. Возрастающая последовательность модулей $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ даёт пару возрастающих последовательностей подмодулей в N и M/N.

2. Нётеровость

В силу нётеровости, обе эти последовательности стабилизируются. Осталось проверить, что если $E \subset F$ и соответствующие пары модулей совпадают, то $E = F$.

2. Нётеровость

В силу нётеровости, обе эти последовательности стабилизируются. Осталось проверить, что если $E \subset F$ и соответствующие пары модулей совпадают, то $E = F$. В самом деле, пусть $f \in F$. Так как $(F+N)/N = (E+N)/N$, то найдутся $e \in E$ и $n_1, n_2 \in N$ такие, что $f + n_1 = e + n_2$. Тогда $f - e = n_2 - n_1$. Левая часть этого равенства лежит в F, а правая в N, поэтому $f - e \in F \cap N = E \cap N$, так что $f \in E + e = E$, что и требовалось доказать.

В силу нётеровости, обе эти последовательности стабилизируются. Осталось проверить, что если $E \subset F$ и соответствующие пары модулей совпадают, то $E = F$. В самом деле, пусть $f \in F$. Так как $(F+N)/N = (E+N)/N$, то найдутся $e \in E$ и $n_1, n_2 \in N$ такие, что $f + n_1 = e + n_2$. Тогда $f - e = n_2 - n_1$. Левая часть этого равенства лежит в F, а правая в N, поэтому
$f - e \in F \cap N = E \cap N$, так что $f \in E + e = E$, что и требовалось доказать. Отсюда получаем такое следствие

Следствие 1

Пусть N, N' — нётеровы подмодули модуля M такие, что $N + N' = M$. Тогда M нётеров.

В самом деле, $N \oplus N'$ нётеров, поскольку содержит подмодуль, изоморфный N, фактор по которому изоморфен N'.

В силу нётеровости, обе эти последовательности стабилизируются. Осталось проверить, что если $E \subset F$ и соответствующие пары модулей совпадают, то $E = F$. В самом деле, пусть $f \in F$. Так как $(F + N)/N = (E + N)/N$, то найдутся $e \in E$ и $n_1, n_2 \in N$ такие, что $f + n_1 = e + n_2$. Тогда $f - e = n_2 - n_1$. Левая часть этого равенства лежит в F, а правая в N, поэтому
$f - e \in F \cap N = E \cap N$, так что $f \in E + e = E$, что и требовалось доказать. Отсюда получаем такое следствие

Следствие 1

Пусть N, N' — нётеровы подмодули модуля M такие, что $N + N' = M$. Тогда M нётеров.

В самом деле, $N \oplus N'$ нётеров, поскольку содержит подмодуль, изоморфный N, фактор по которому изоморфен N'. Определим отображение $\varphi : N \oplus N' \to M$ формулой $\varphi(n, n') = n + n'$. Тогда $M \simeq N \oplus N' / \ker \varphi$, что и завершает доказательство.

2. Нётеровость

Кольцо A называется нётеровым, если оно нётерово как модуль над собой. Эквивалентно, кольцо нётерово если и только если все его идеалы конечно порождены.

Утверждение 3

Если A — нётерово кольцо, а M — конечнопорожденный A-модуль, то M нётеров.

2. Нётеровость

Кольцо A называется нётеровым, если оно нётерово как модуль над собой. Эквивалентно, кольцо нётерово если и только если все его идеалы конечно порождены.

Утверждение 3

Если A — нётерово кольцо, а M — конечнопорожденный A-модуль, то M нётеров.

В самом деле, если $x_1, \ldots, x_n$ — порождающие M, то имеется сюръективное отображение $f : A^n \to M$, заданное формулой $f(a_1, ..., a_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, что и завершает доказательство.

2. Нётеровость

Кольцо A называется нётеровым, если оно нётерово как модуль над собой. Эквивалентно, кольцо нётерово если и только если все его идеалы конечно порождены.

Утверждение 3

Если A — нётерово кольцо, а M — конечнопорожденный A-модуль, то M нётеров.

В самом деле, если $x_1, \ldots, x_n$ — порождающие M, то имеется сюръективное отображение $f : A^n \to M$, заданное формулой $f(a_1, ..., a_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, что и завершает доказательство. Соображение о сюръективности приводит и к такому факту:

Утверждение 4

Пусть $\varphi : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм колец, причем A нётерово. Тогда B также нётерово.

В самом деле, если $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \ldots$ — возрастающая цепочка идеалов в B, то $J_k = \varphi^{-1}(I_k)$ — возрастающая цепочка идеалов в A. Она стабилизируется и $\varphi(J_k) = I_k$, в силу сюръективности, что и завершает доказательство.

2. Нётеровость

Докажем еще одно классическое утверждение о нётеровости — теорему Гильберта о базисе.

Теорема 1

Пусть A — коммутативное нётерово кольцо. Тогда $A[x]$ также нётерово.

2. Нётеровость

Докажем еще одно классическое утверждение о нётеровости — теорему Гильберта о базисе.

Теорема 1

Пусть A — коммутативное нётерово кольцо. Тогда $A[x]$ также нётерово.

Пусть I — идеал в $A[x]$. Для каждого n зададим a_n как подмножество в A, состоящее из 0 и всех старших коэффициентов всех многочленов степени n. Легко видеть, что a_n — идеал и $a_0 \subset a_1 \subset a_2 \dots$. В силу нётеровости, данная цепочка стабилизируется. Пусть это произошло в месте r.

Докажем еще одно классическое утверждение о нётеровости — теорему Гильберта о базисе.

Теорема 1

Пусть A — коммутативное нётерово кольцо. Тогда $A[x]$ также нётерово.

Пусть I — идеал в $A[x]$. Для каждого n зададим a_n как подмножество в A, состоящее из 0 и всех старших коэффициентов всех многочленов степени n. Легко видеть, что a_n — идеал и $a_0 \subset a_1 \subset a_2 \ldots$. В силу нётеровости, данная цепочка стабилизируется. Пусть это произошло в месте r. Идеалы $a_0, a_1, \ldots, a_r$ конечно порождены. Пусть $a_{01}, \ldots, a_{0n_0}$ порождают a_0, $a_{11}, \ldots, a_{1n_1}$ порождают a_1 и так далее. Для каждой пары $0 \leq i \leq r$ и $1 \leq j \leq n_i$ найдем многочлен f_{ij} степени i со старшим членом $a_{ij}x^i$. Утверждается, что f_{ij} порождают I.

В самом деле, пусть f — многочлен наименьшей степени d, который лежит в I, но не в идеале, порожденном f_{ij}. Если $d < r$, то старший коэффициент f является комбинацией коэффициентов $f_{d1}, \ldots, f_{dn_d}$, скажем, с коэффициентами $c_1, \ldots, c_{n_d}$. Тогда многочлен

$$f - c_1 f_{d1} - \ldots - c_{n_d} f_{dn_d}$$

имеет степень меньшую, чем d (сократились главные слагаемые), и по-прежнему лежит в I. Стало быть, он лежит в идеале, порожденном f_{ij}, а значит то же верно и про f, противоречие.

2. Нётеровость

В самом деле, пусть f — многочлен наименьшей степени d, который лежит в I, но не в идеале, порожденном f_{ij}. Если $d < r$, то старший коэффициент f является комбинацией коэффициентов $f_{d1}, \ldots, f_{dn_d}$, скажем, с коэффициентами $c_1, \ldots, c_{n_d}$. Тогда многочлен

$$f - c_1 f_{d1} - \ldots - c_{n_d} f_{dn_d}$$

имеет степень меньшую, чем d (сократились главные слагаемые), и по-прежнему лежит в I. Стало быть, он лежит в идеале, порожденном f_{ij}, а значит то же верно и про f, противоречие. Если же $d \geq r$, то старший коэффициент f является комбинацией коэффициентов $f_{r1}, \ldots, f_{rn_r}$, откуда для некоторых c_i получаем, что многочлен

$$f - c_1 x^{d-r} f_{r1} - c_2 x^{d-r} f_{r2} - \ldots - c_{n_r} x^{d-r} f_{rn_r}$$

имеет степень меньшую, чем d, откуда вновь получаем противоречие.

2. Нётеровость

В самом деле, пусть f — многочлен наименьшей степени d, который лежит в I, но не в идеале, порожденном f_{ij}. Если $d < r$, то старший коэффициент f является комбинацией коэффициентов $f_{d1}, \ldots, f_{dn_d}$, скажем, с коэффициентами $c_1, \ldots, c_{n_d}$. Тогда многочлен

$$f - c_1 f_{d1} - \ldots - c_{n_d} f_{dn_d}$$

имеет степень меньшую, чем d (сократились главные слагаемые), и по-прежнему лежит в I. Стало быть, он лежит в идеале, порожденном f_{ij}, а значит то же верно и про f, противоречие. Если же $d \geq r$, то старший коэффициент f является комбинацией коэффициентов $f_{r1}, \ldots, f_{rn_r}$, откуда для некоторых c_i получаем, что многочлен

$$f - c_1 x^{d-r} f_{r1} - c_2 x^{d-r} f_{r2} - \ldots - c_{n_r} x^{d-r} f_{rn_r}$$

имеет степень меньшую, чем d, откуда вновь получаем противоречие. Это и завершает доказательство теоремы.