

Комплексные поверхности,

лекция 1: Классы Черна

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

6 февраля 2012

Градуированные векторные пространства и алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированное векторное пространство есть пространство $V^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\text{End}(V^*) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\text{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная алгебра (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Категорию градуированных векторных пространств можно определить как **категорию векторных пространств с действием $U(1)$** ; весовое разложение определяет градуировку по формуле $\rho(t)|_{A^n} = e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$. Тогда **градуированная алгебра есть ассоциативная алгебра в категории пространств с $U(1)$ -действием**.

Суперкоммутатор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** \tilde{a} оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной**, или **градуированной коммутативной**, если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана Λ^*V суперкоммутативна.

Биалгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – градуированная коммутативная, ассоциативная алгебра над полем k . A называется **биалгеброй**, если A снабжена морфизмом градуированных алгебр $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_k A$ ("**коумножением**"), причем имеет место **условие ассоциативности**: $\Delta \otimes \text{Id}_A \circ \Delta = \text{Id}_A \otimes \Delta \circ \Delta : A \otimes_k A \otimes_k A \longrightarrow A$. **Коединица** биалгебры есть гомоморфизм k -алгебр $A \xrightarrow{\varepsilon} k$ такой, что $\Delta \circ (\varepsilon \otimes \text{Id}_A) = \Delta \circ (\text{Id}_A \otimes \varepsilon) = \text{Id}_A$

ЗАМЕЧАНИЕ: Все биалгебры в дальнейшем молчаливо предполагаются снабженными единицей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Условие коассоциативности вместе с коединицей означает просто, что двойственное пространство A^* снабжено структурой алгебры. Согласованность с умножением в A – то, что структура алгебры на A^* задается морфизмом A -модулей.

Примеры биалгебр

ПРИМЕР: Пусть N – пространство, снабженное коммутативной, ассоциативной операцией $N \times N \xrightarrow{m} N$ (такая структура называется **структурой коммутативного моноида**). Тогда **кольцо k -значных функций $C(N)$ образует биалгебру**, где морфизм коумножения индуцируется отображением $m^*C(N) \longrightarrow C(N \times N) = C(N) \otimes_k C(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Понятие биалгебры есть абстракция этого наблюдения: эвристически, **биалгебры суть алгебры функций на моноидах**.

ПРИМЕР: Пусть N – связное топологическое пространство, снабженное непрерывной операцией $N \times N \xrightarrow{m} N$, задающей на N структуру коммутативного, ассоциативного моноида. Рассмотрим коумножение на алгебре когомологий $H^*(N)$, заданное отображением $m^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(N \times N) = H^*(N) \otimes_k H^*(N)$. **Тогда $H^*(N)$ есть биалгебра** (проверьте это).

Алгебры Хопфа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Биалгебра называется **алгеброй Хопфа**, если она снабжена гомоморфизмом $A \xrightarrow{S} A$ ("**отображением антипода**"), и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & \xrightarrow{S \otimes \text{Id}} & A \otimes A & & \\
 & \nearrow \Delta & & & & \searrow \text{mult} & \\
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & k & \xrightarrow{1} & A & & \\
 & \searrow \Delta & & & & \nearrow \text{mult} & \\
 & & A \otimes A & \xrightarrow{\text{Id} \otimes S} & A \otimes A & &
 \end{array}$$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Условие антипода самодвойственно:** если A – алгебра Хопфа, то A^* – тоже алгебра Хопфа.

ПРИМЕР: Пусть N – группа, а $C(N)$ – пространство функций на N , снабженное структурой биалгебры. Тогда отображение $n \rightarrow n^{-1}$ задает на $C(N)$ структуру антипода. Мы получили, что **алгебра функций $C(N)$ на группе есть алгебра Хопфа** (проверьте это).

ПРИМЕР: Пусть G – топологическая группа, а $H^*(G)$ – ее алгебра когомологий, снабженная структурой биалгебры. Рассмотрим отображение $H^*(G) \xrightarrow{S} H^*(G)$, индуцированное $x \rightarrow x^{-1}$. **Тогда $H^*(G)$ – алгебра Хопфа** (проверьте это).

H -группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: H -группа есть топологическое пространство M , снабженное непрерывным отображением $M \times M \xrightarrow{\mu} M$, ("**отображением умножения**"), таким, что ограничение μ на $M \times \{e\}$ гомотопно тождественному для какого-то $e \in M$ ("**гомотопическая единица**"), и отображением $M \xrightarrow{\eta} M$ ("**взятием обратного**"), удовлетворяющим аксиомам группы **с точностью до гомотопии**. А именно, имеет место

* **гомотопическая ассоциативность** композиции $\mu \times \text{Id} \circ \mu$ и $\text{Id} \times \mu \circ \mu$ гомотопны как отображения из $M \times M \times M$ в M ,

* **отображение гомотопического обращения:** композиции $\text{diag} \circ (\eta \times \text{Id}) \circ \mu$ и $\text{diag} \circ (\text{Id} \times \eta) \circ \mu$ гомотопны отображению M в точку.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если не требуется H -ассоциативности и наличия H -обратного, M называется **H -пространством**

ПРИМЕР: Проверьте, что **пространство петель $\Omega(X, x)$ является H -группой.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – H -группа. Тогда алгебра когомологий $H^*(M, k)$ – **алгебра Хопфа.**

Структурная теорема для алгебр Хопфа

Пусть V^\bullet – градуированное векторное пространство. Обозначим за $Sym_{gr}(V)$ тензорное произведение $Sym^*(V^{\text{even}}) \otimes \Lambda^*(V^{\text{odd}})$ с естественной градуировкой. На $Sym_{gr}(V)$ задана структура градуированной коммутативной алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Свободная коммутативная** алгебра есть алгебра полиномов. **Свободная градуированная алгебра** есть $Sym_{gr}(V^\bullet)$, где V^\bullet – градуированное векторное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра конечного типа** есть алгебра, градуированная $i \geq 0$, у которой все градуированные пространства конечномерны.

Теорема Хопфа: Пусть A есть градуированная алгебра Хопфа конечного типа над полем k характеристики 0. **Тогда A – свободная (градуированная) k -алгебра.**

Примитивные элементы в биалгебрах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Элемент x биалгебры называется **примитивным**, если $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

Мы сначала докажем теорему Хопфа для алгебр Хопфа, (мультипликативно) порожденных примитивными элементами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – алгебра Хопфа, $P \subset A$ – пространство примитивных элементов. Рассмотрим естественный мультипликативный гомоморфизм $\text{Sym}_{gr}(P) \xrightarrow{\psi} A$. Говорится, что A **свободна вплоть до степени k** , если $\bigoplus^{i \leq k} \text{Sym}_{gr}^i(P) \xrightarrow{\psi} A$ вложение.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из следующей леммы **немедленно вытекает теорема Хопфа**, для алгебр, порожденных примитивными элементами.

ЛЕММА: Пусть A – алгебра Хопфа, свободная вплоть до степени k . **Тогда A свободна вплоть до степени $k + 1$.**

Структурная теорема для алгебр Хопфа, порожденных примитивными элементами

ЛЕММА: Пусть A – алгебра Хопфа (или даже биалгебра), свободная вплоть до степени k . **Тогда A свободна вплоть до степени $k + 1$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\{x_i\}$ – какой-то базис в P . Рассмотрим полиномиальное соотношение степени $k + 1$, $Q(x_1, \dots, x_n) = 0$, и представим его в виде полинома от x_1 с коэффициентами, которые будут полиномами от x_2, \dots, x_n : $Q = Q_m x_1^m + Q_{m-1} x_1^{m-1} + \dots + Q_0$. Поскольку $\psi : \bigoplus^{i \leq k} \text{Sym}_{gr}^i(P) \xrightarrow{\psi} A$ вложение, имеем

$$\Delta(Q) = Q \otimes 1 + 1 \otimes Q + R,$$

где $R \in \mathfrak{A} := \left(\bigoplus^{i \leq k} \text{Sym}_{gr}^i(P) \right) \otimes \left(\bigoplus^{i \leq k} \text{Sym}_{gr}^i(P) \right)$.

Шаг 2: Каждый элемент \mathfrak{A} представляется как сумма мономов вида $\lambda \otimes \mu$, где λ, μ – мономы от x_i . Обозначим за $\Pi : \mathfrak{A} \rightarrow x_1 \otimes \left(\bigoplus^{i \leq k} \text{Sym}_{gr}^i(P) \right)$ проекцию на сумму всех мономов вида $x_1 \otimes \mu$. Поскольку $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$, имеем $\Delta(x_1^m) = (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1)^m$, **что дает $\Pi(\Delta(x_1^m)) = m x_1 \otimes x_1^{m-1}$.**

Структурная теорема для алгебр Хопфа, порожденных примитивными элементами (продолжение)

Шаг 3: Пусть $\Pi(R) = x_1 \otimes R_0$. Поскольку $Q = 0$, его компонента R_0 тоже равна нулю. **В силу шага 2,**

$$0 = x_1 \otimes R_0 = \sum_{i=1}^m m x_1^{m-1} Q_m$$

где Q_i – полиномы, определенные в шаге 1. Значит, все $Q_i = 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: На шаге 3 **используется** $\text{char } k = 0$.

Доказательство теоремы Хопфа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал аугментации Z в алгебре Хопфа есть ядро отображения коединицы $\varepsilon : A \rightarrow k$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Условие коединицы дает $x = \varepsilon \otimes \text{Id}_A(\Delta(x))$ и $x = \text{Id}_A \otimes \varepsilon(\Delta(x))$, то есть

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \pmod{Z \otimes Z}$$

Доказательство теоремы Хопфа. Шаг 1: Рассмотрим фильтрацию алгебры A степенями Z^i идеала аугментации Z , и присоединенную градуированную алгебру $A_{gr} := \bigoplus_i Z^i / Z^{i+1}$. В силу предыдущего замечания, $\Delta(Z^p) \subset \bigoplus_{i+j=p} Z^i \otimes Z^j$.

Шаг 2: Мы получили, что все операции, определенные на алгебре Хопфа, совместимы с фильтрацией степенями Z (проверьте). Значит, A_{gr} — тоже алгебра Хопфа.

Шаг 3: Алгебра A_{gr} мультипликативно порождена Z^1 / Z^2 (это общее свойство присоединенных градуированных алгебр по адической фильтрации).

Доказательство теоремы Хопфа (окончание)

Шаг 4: Поскольку $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \pmod{(Z \otimes Z)}$, все элементы Z^1/Z^2 примитивны. В силу шага 3, A_{gr} порождена примитивными элементами.

Шаг 5: По теореме, доказанной выше, A_{gr} свободно порождена $\{x_i\}$, где x_i – базис в пространстве примитивных элементов A_{gr} . Выберем для каждого из x_i представитель \tilde{x}_i в A . Поскольку между x_i нет соотношений в A_{gr} , между \tilde{x}_i нет соотношений в A . Осталось доказать, что \tilde{x}_i порождают A .

Шаг 6: Размерности градуированных компонент A^p и A_{gr}^p равны (здесь идет речь о градуировке, которая была изначально задана на A и индуцированной градуировке на A_{gr}). Пусть $\{y_i\}$ есть набор мономов в A_{gr} , порождающих заданную компоненту A_{gr}^p , а $\{\tilde{y}_i\}$ – соответствующие элементы A^p . Тогда $\{y_i\}$ – базис в A_{gr}^p , а $\{\tilde{y}_i\}$ – линейно независимые элементы в пространстве A^p той же размерности. Следовательно, **МОНОМЫ $\{\tilde{y}_i\}$ порождают A^p .** ■

Применения теоремы Хопфа

СЛЕДСТВИЕ: Алгебра $H^*(G, \mathbb{Q})$ когомологий группы Ли – **грассмано-ва алгебра, порожденная нечетномерными образующими.**

СЛЕДСТВИЕ: Алгебра $H^*(\Omega M, \mathbb{Q})$ когомологий пространства петель любого конечного клеточного пространства M – **свободная суперкоммутативная алгебра.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Доказательство структурной теоремы **нигде не использует аксиому антипода.** Таким образом, **теорема Хопфа верна для любой биалгебры конечного типа, в частности, для алгебры когомологий H -пространства.**

Алгебра когомологий $U(n)$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Алгебра когомологий $H^*(U(n), \mathbb{Q})$ – **грассманова алгебра, порожденная образующими в размерностях $1, 3, 5, \dots, 2n-1$.**

Доказательство. Шаг 1: Группа $U(n)$ расслоена над S^{2n-1} со слоем $U(n-1)$ (проверьте это). Применяв индукцию, мы можем считать, что $H^*(U(n-1))$ **свободная алгебра с образующими во всех в нечетных степенях.**

Шаг 2: Пусть $\xi_{2n-1} \in H^*(U(n))$ получена как обратный образ формы объема на сфере. Написав спектральную последовательность расслоения $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$, мы убедимся, что $H^*(U(n))$ **свободно порождена образующими $U(n-1)$ и ξ_{2n-1} , если все дифференциалы d_i спектральной последовательности зануляются на ξ_{2n-1} .**

Шаг 3: Поскольку $U(n)$ свободна, $d_i(\xi_{2n-1})$ либо нулевой, либо является линейной комбинацией примитивных классов в $H^*(U(n-1))$. Последнее невозможно, потому что d_i отображает четные классы в нечетные. ■

Многообразие Грассмана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $\text{Gr}(n, m)$ **многообразие Грассмана** n -мерных плоскостей в m -мерном пространстве над k , $k = \mathbb{C}$ или \mathbb{R} , и пусть B_{fun} обозначает **фундаментальное n -мерное расслоение над $\text{Gr}(n, m)$** (над каждой точкой $x \in \text{Gr}(n, m)$ висит соответствующее n -мерное пространство $V_x \subset k^m$).

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B_{triv} – тривиальное m -мерное расслоение над грассманианом $\text{Gr}(n, m)$, а B'_{fun} – расслоение, сопоставляющее точке $x \in \text{Gr}(n, m)$ фактор k^m по V_x . Тогда **имеет место точная последовательность** $0 \longrightarrow B'_{\text{fun}} \longrightarrow B_{\text{triv}} \longrightarrow B_{\text{fun}} \longrightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – n -мерное векторное расслоение над топологическим пространством X такое, что $B \oplus B'$ тривиально, для $\dim B' = m - n$. Отождествив все слои $B \oplus B'$, получим, что **каждая точка $x \in X$ задает плоскость $\varphi(x)$ в k^m** .

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – n -мерное расслоение над пространством X такое, что $B \oplus B'$ тривиально, для $\dim B' = m - n$. **Тогда существует отображение $\varphi : X \longrightarrow \text{Gr}(n, m)$ такое, что $\varphi^* B_{\text{fun}} \cong B$** .

Грассманиан $Gr(n, \infty)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим естественные вложения

$$Gr(n, m) \hookrightarrow Gr(n, m + 1) \hookrightarrow Gr(n, m + 2) \hookrightarrow \dots,$$

и пусть $Gr(n) := Gr(n, \infty)$ обозначает объединение всех этих пространств (то есть прямой предел клеточных комплексов). Это пространство n -мерных плоскостей в k^∞ , где k^∞ обозначает $\bigoplus_{i=0}^{\infty} k$.

ТЕОРЕМА: Пусть B – расслоение над многообразием M . Тогда $B \oplus B'$ тривиально, для какого-то расслоения B' над M .

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите эту теорему самостоятельно (доказательство аналогично теореме Уитни об иммерсии многообразия в \mathbb{R}^n).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – n -мерное расслоение на многообразии M . Тогда существует отображение $\varphi : M \rightarrow Gr(n)$ такое, что $B = \varphi^* B_{\text{fun}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись теоремой о вложении расслоения в тривиальное, получим тривиализацию $B \oplus B'$, для какого-то расслоения B' над M . Соответствующее отображение $\varphi : M \rightarrow Gr(n, m)$ построено выше. ■

Классифицирующие пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа, X – топологическое пространство. **Главное G -расслоение над X** есть топологическое пространство E , снабженное свободным действием G , таким, что $E/G = X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Классифицирующее пространство** для топологической группы G есть пространство BG , снабженное главным G -расслоением G_{fun} , тотальное пространство которого стягиваемо.

ПРИМЕР: (оставлен в качестве упражнения) $Gr(n)$ **есть классифицирующее пространство для $GL(n, k)$.**

ТЕОРЕМА: Пусть BG – классифицирующее пространство для группы G . Тогда **классы гомотопии отображений $X \rightarrow BG$ взаимно однозначно соответствуют классам изоморфизма главных G -расслоений:** для каждого G -расслоения Y существует (единственное до гомотопии) отображение $X \xrightarrow{\varphi} BG$ такое, что $\varphi^*G_{\text{fun}} \cong Y$.

Классифицирующие пространства (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть BG – классифицирующее пространство для группы G . Тогда **классы гомотопии отображений $X \rightarrow BG$ взаимно однозначно соответствуют классам изоморфизма главных G -расслоений:** для каждого G -расслоения Y существует (единственное до гомотопии) отображение $X \xrightarrow{\varphi} BG$ такое, что $\varphi^*G_{\text{fun}} \cong Y$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $Y \rightarrow X$ – главное G -расслоение. Рассмотрим произведение $Y \times E$ с диагональным действием G как расслоение над $X \times E$. **Как G -расслоение, $Y \times E \rightarrow X \times E$ гомотопически эквивалентно $Y \rightarrow X$.** Отображение проекции на второй аргумент дает $X = Y/G \sim (Y \times E)/G \rightarrow BG$, что приводит к искомому отображению $X \xrightarrow{\varphi} BG$.

Шаг 2: Пусть даны отображения $X \xrightarrow{\varphi_i} BG$, $i = 0, 1$. Получаем расслоение $(Y \times \{0, 1\}) \times E \xrightarrow{\check{\Phi}} (X \times \{0, 1\}) \times E$, факторизация по G и проекция на второй аргумент дает φ_i . Поскольку φ_i индуцирует одно и то же расслоение, $\check{\Phi}$ можно продолжить до $(Y \times [0, 1]) \times E \xrightarrow{\Phi} (X \times [0, 1]) \times E$. Факторизуя по G и проектируя на $E/G = BG$, **получаем искомую гомотопию $(Y \times [0, 1]) \times E \rightarrow BG$.** ■

Классифицирующее пространство для $U(n)$

Отныне мы будем работать над \mathbb{C} , и наше поле $k = \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА:

$Gr(n, \mathbb{C})$ есть классифицирующее пространство для $U(n)$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть E_n – множество всех последовательностей $\{x_1, \dots, x_n\} \subset k^\infty$ из n ортонормированных векторов в \mathbb{C}^∞ . Очевидно, $E/GL(n) = Gr(n)$. **Осталось убедиться, что E_n стягиваемо.**

Шаг 2: Пусть $Y \rightarrow X$ локально тривиальное расслоение, слой которого стягиваем, и база тоже стягиваема. **Тогда Y стягиваемо** (докажите это).

Шаг 3: Обозначим за $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$ единичную сферу в \mathbb{C}^∞ . **Тогда E_n расслоено над S^n со слоем E_{n-1} .** Для доказательства стягиваемости E_n осталось убедиться, что S^∞ стягиваемо, и применить индукцию.

Классифицирующее пространство для $U(n)$ (продолжение)

Шаг 4: Проще убедиться, что $\mathbb{C}^\infty \setminus 0$ стягиваемо (эти пространства, очевидно, гомотопически эквивалентны). Выберем в \mathbb{C}^∞ базис, пронумерованный $\mathbb{Z}^{\geq 0}$. Рассмотрим отображение $N : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, переводящее i -й вектор базиса в $i + 1$ -й. Тогда $t\text{Id} + (1 - t)N$ переводит $\mathbb{C}^\infty \setminus 0$ в себя для любого $t \in \mathbb{R}$. **Это задает гомотопию тождественного отображения $\text{Id}_{\mathbb{C}^\infty \setminus 0}$ и N .**

Шаг 5: Поскольку вектор $(1, 0, 0, 0, \dots)$ не принадлежит образу N , из него можно спроектировать на аффинное пространство $A = \{1/2, t_1, t_2, \dots\}$, получив гомотопию Id и отображения $\mathbb{C}^\infty \setminus 0 \rightarrow A$. **Поскольку A стягиваемо, это отображение гомотопно тривиально. ■**

ЗАМЕЧАНИЕ: Классы гомотопии главных $U(n)$ расслоений это то же самое, что классы гомотопии векторных n -мерных расслоений над \mathbb{C} (проверьте это).

СЛЕДСТВИЕ: Классы гомотопии n -мерных расслоений суть гомотопические классы отображения в $\text{Gr}(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали это над \mathbb{C} ; доказательство над \mathbb{R} остается как упражнение.

Бесконечномерный грассманиан

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $X_\infty = \bigcup X_i$ – счетное объединение стягиваемых клеточных пространств. **Тогда X_∞ тоже стягиваемо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Выберем базис x_0, x_1, \dots , в \mathbb{C}^∞ , и пусть $N : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ определено как выше, $N(x_i) = x_{i+1}$. Рассмотрим вложение $Gr(n, \infty) \hookrightarrow Gr(n+1, \infty)$, переводящее подпространство $L \subset \mathbb{C}^\infty$ в $\langle x_0, N(L) \rangle$. Объединение $\bigcup_n Gr(n, \infty)$ называется **бесконечномерный грассманиан**, и обозначается $B\mathbb{U}$.

ТЕОРЕМА:

$B\mathbb{U}$ есть классифицирующее пространство для $U = \bigcup_n U(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим вложения $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ полученные как выше, $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\} \in \mathbb{C}^\infty$ переводится в $\{x_0, N(\zeta_1), \dots, N(\zeta_m)\}$, и пусть E_∞ есть объединение всех E_i . По построению, $B\mathbb{G} = E_\infty/U$, значит, **достаточно убедиться, что E_∞ стягиваемо.** Это вытекает из предыдущего упражнения. ■

Стабильная эквивалентность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторные расслоения B_1 и B_2 называются **стабильно эквивалентными**, если $B_1 \oplus U_1 \cong B_2 \oplus U_2$, где U_i – тривиальные векторные расслоения.

ТЕОРЕМА: Пусть X – конечное клеточное пространство. Тогда **классы гомотопии отображений $X \rightarrow BG$ биективно соответствуют классам стабильной эквивалентности векторных расслоений.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проверьте самостоятельно. ■

Когомологии $B\mathbb{U}$

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу периодичности Ботта, $B\mathbb{U} = \Omega U$, значит, $B\mathbb{U}$ есть H -группа, и можно применить теорему Хопфа, чтобы узнать ее когомологии. Поскольку для теоремы Хопфа достаточно только коумножения (и коединицы) в когомологиях, для того же самого результата достаточно построить на $B\mathbb{U}$ структуру H -пространства.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим отображение $V : \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, переводящее базисные вектора x_i первого пространства в x_{2i} , а базисные вектора второго пространства в x_{2i+1} . Тогда $L, L' \rightarrow V(L, L')$ задает структуру H -пространства на бесконечном грассманиане $B\mathbb{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нечего тут доказывать. ■

СЛЕДСТВИЕ:

$H^*(B\mathbb{U}, \mathbb{Q})$ – свободная суперкоммутативная алгебра.

ЗАМЕЧАНИЕ: Нетрудно написать клеточное разложение для грассманиана, все клетки которого ("клетки Шуберта") будут четными. Значит, $H^*(B\mathbb{U})$ коммутативна.

Когомологии $B\mathbb{U}$ (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: $H^*(B\mathbb{U}, \mathbb{Q})$ – свободная полиномиальная алгебра, порожденная примитивными классами ch_1, ch_2, \dots во всех четных степенях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим фундаментальное расслоение $E \rightarrow B\mathbb{U}$ со слоем U . Когомологии U нам известны: это свободная грассманова алгебра, порожденная образующими во всех нечетных степенях. Поскольку E стягиваемо, для каждой образующей ξ_{2i-1} в $H^{2i-1}(U)$ должен существовать класс $ch_{2i} \in H^{2i}(B\mathbb{U})$, который будет образом соответствующего дифференциала спектральной последовательности.

Что между такими классами нет соотношений, это следует из теоремы Хопфа. ■

Классы Черна: аксиоматическое определение

Классы Черна суть классы $c_i(B) \in H^{2i}(B)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, определенные для любого векторного расслоения B на клеточном пространстве X , и удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. $c_0(V) = 1$.
2. **функториальность:** если $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f^*c_i(B) = c_i(f^*B)$.
3. **Формула Уитни:** $c_*(B \oplus B') = c_*(B)c_*(B')$, где $c_*(B) = \sum_i c_i(B)$.
4. Если $\mathcal{O}(i)$ – стандартное расслоение на проективном пространстве, то $c_1(\mathcal{O}(1)) = [H]$, где $[H]$ – фундаментальный класс гиперплоскости, а для всех $i > 0$, $c_i(\mathcal{O}(1)) = 0$.

Характер Черна и классы Черна: явная конструкция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение на X , а $\varphi : X \rightarrow BU(n) \subset BU$ – соответствующее отображение. i -й **характер Черна** $ch_i(B)$ есть класс когомологий $ch_i(B) \in H^{2i}(X)$, полученный как $\varphi^*(ch_i)$, где ch_i – примитивная образующая $H^*(BU)$, построенная только что.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: k -й **класс Черна** расслоения B определяется как компонента градуировки $2k$ в сумме $e^{\sum_i ch_i(B)}$. В частности, $c_1(B) = ch_1(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Классы Черна целые (если выбрать правильную нормализацию ch_i). **Над \mathbb{Z} , когомологии BU порождены классами Черна фундаментального расслоения B_{fun} .**

ЗАМЕЧАНИЕ: $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$, ибо бесконечномерная сфера S^∞ расслоена над $\mathbb{C}P^\infty$ со слоем $U(1)$. Алгебра $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ изоморфна $\mathbb{C}[t]$, где t есть фундаментальный класс гиперплоскости.

СЛЕДСТВИЕ: Первый класс Черна голоморфного линейного расслоения $\mathcal{O}(1)$, полученного из вложения X в $\mathbb{C}P^n$, равен **фундаментальному классу дивизора гиперплоского сечения.**

Характер Черна и классы Черна: явная конструкция (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим структуру H -пространства на $B\mathbb{U}$, построенную выше: $\mu : B\mathbb{U} \times B\mathbb{U} \rightarrow B\mathbb{U}$. Пусть B_1, B_2 – векторные расслоения на X , полученные из отображений $\varphi_i : X \rightarrow B\mathbb{U}$. Тогда $B_1 \oplus B_2$ получено из $\varphi_1 \times \varphi_2 \circ \mu : X \rightarrow B\mathbb{U}$. Мы получили, что **коумножение в $H^*(B\mathbb{U})$ согласовано с взятием прямой суммы расслоений.**

СЛЕДСТВИЕ: Характер Черна аддитивен: $ch_i(B \oplus B') = ch_i(B) + ch_i(B')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mu^*(ch_i) = 1 \otimes ch_i + ch_i \otimes 1$, поскольку ch_i примитивны. Значит, $ch_i(B \oplus B') = (\varphi \times \varphi')(1 \otimes ch_i + ch_i \otimes 1) = ch_i(B) + ch_i(B')$.

■

СЛЕДСТВИЕ: (формула Уитни)

Обозначим за $c_*(B) \in H^*(X)$ тотальный класс Черна расслоения, то есть $\sum_{i \geq 0} c_i(B)$, где $c_0(B) = 1$. **Тогда $c_*(B \oplus B') = c_*(B)c_*(B')$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $e^{a+b} = e^a e^b$. ■