

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.  
Римановы многообразия. 8.04.2013.**

*Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.*

**Задача 1.** Пусть  $e_i$  базис в векторных полях,  $e^i$  дуальный к нему базис. Рассмотрим сечение  $s$  расслоения  $\xi = (E \rightarrow M)$ . Формулу  $\nabla s = e^i \otimes \nabla_{e_i} s$ , где  $s \in \Gamma(M, E)$ , для связности в расслоении  $\xi$  по ошибке иногда пишут как  $\nabla s = e^i \wedge \nabla_{e_i} s$ , но последняя формула неверна и *для произвольного расслоения  $\xi$  не имеет смысла!*

Но есть случай, когда операция  $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$  имеет смысл и тоже интересна. Пусть у нас есть симметричная связность  $\nabla$  в  $TM$ . Распространим эту связность в расслоение внешних форм. Пусть  $s \in \Omega(M)$  дифференциальная форма на  $M$ . Рассмотрим операцию  $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$ , где мы смотрим на  $s$  как на сечение расслоения  $\wedge T^*M$ , а не как на форму со значениями в сечениях.

Доказать, что тогда  $\nabla \wedge s = ds$ , то есть это обычный внешний дифференциал формы  $s$ . Чему равно выражение  $\nabla \wedge s$  для несимметричной связности  $\nabla$  в касательном расслоении  $TM$ ?

**Задача 2.** Если  $\nabla$  связность в касательном расслоении  $TM$ , то она продолжается до связностей во всех тензорных расслоениях  $T_q^p M$ . Для простоты будем обозначать эти продолжения связности  $\nabla$  тем же символом  $\nabla$ . Доказать, что связность  $\nabla$  согласована с метрикой  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  тогда и только тогда, когда  $\nabla g = 0$ , где  $g$  метрический тензор.

Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита  $\nabla$  является симметрическим,  $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$ .

**Задача 3.** Доказать, что для симметричной связности  $\nabla$  имеет место тождество Бианки

$$(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0,$$

где  $X, Y, Z$  и  $V$  векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R^l_{ij,k} + \nabla_i R^l_{jm,k} + \nabla_j R^l_{mi,k} = 0.$$

**Задача 4.** Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

- первое структурное уравнение Картана  $de^i = e^j \wedge \Gamma_j^i + T^i$ ,
- второе структурное уравнение Картана

$$d\Gamma_i^j = \Gamma_i^k \wedge \Gamma_k^j + F_i^j,$$

- первое тождество Бианки

$$dT^i = -T^j \wedge \Gamma_j^i + e^j \wedge F_j^i,$$

- второе тождество Бианки

$$dF_i^j = \Gamma_i^k \wedge F_k^j - F_i^k \wedge \Gamma_k^j,$$

где  $e^i$  дуальный базис к выбранному базису  $e_i$  в векторных полях,  $\Gamma_j^i$  локальная 1-форма связности,

$$F_i^j = R_{kl,i}^j e^k \otimes e^l = \sum_{k<l} R_{kl,i}^j e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а  $T^i$  локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T_{ij}^k e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij}^k e^i \wedge e^j.$$

**Задача 5.** Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой  $R_{12,2}^1$ . Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Рассмотрим двумерную поверхность  $M$  в  $\mathbb{E}^3$  с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Пусть  $K$  гауссова кривизна  $M$ . Доказать, что в данном случае

- $\text{Ric}(X, Y) = K\langle X, Y \rangle$ , или, в тензорной записи,  $R_{ij} = Kg_{ij}$ ,
- скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой,  $R = 2K$ .

**Задача 6.** Доказать, что для  $n$ -мерной сферы  $\mathbb{S}_r^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$  радиуса  $r$  тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна  $K = \frac{1}{r^2}$ .