

ЛИСТОК 7. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

Задача 1. Пусть X, Y — два множества, $F(X), F(Y)$ — алгебры функций на множестве (со значениями в \mathbb{R}). а) Постройте каноническое линейное отображение $F(X) \otimes F(Y) \rightarrow F(X \times Y)$ и докажите, что оно является вложением. Является ли построенное отображение изоморфизмом, если б) X и Y конечны, функции произвольные? в) X конечно, Y счетно, функции произвольные? г) $X = Y = \mathbb{R}$, F — пространство многочленов или рациональных функций? д) $X = Y = \mathbb{R}$, F — пространство непрерывных функций?

Задача 2. а) Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейные операторы. Докажите, что $\det A \otimes B = (\det A)^m (\det B)^n$. б) Выразите характеристический многочлен $A \otimes B$ через характеристические многочлены A и B .

Задача 3. Докажите, что не существует канонического изоморфизма V и V^* .

Задача 4. а) Пусть $u_1, \dots, u_n \in U$ и $v_1, \dots, v_m \in V$ — базисы. Докажите, что тензор $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} u_i \otimes v_j$ является разложимым (равен $u \otimes v$ для некоторых $u \in U$, $v \in V$) тогда и только тогда, когда $\text{Rk}(\lambda_{ij}) \leq 1$. б) Докажите, что если $m = n = 2$, то множество S разложимых тензоров в $U \otimes V$ является гиперповерхностью; выпишите задающее ее уравнение. в) Найдите касательное подпространство к множеству S разложимых тензоров в $U \otimes V$ в произвольной точке. В каких точках это возможно? Какова его размерность? г) Докажите, что при $n = 3$, $m = 2$ множество S разложимых тензоров представляет собой гладкое в большинстве точек (уточните!) четырехмерное многообразие. Задайте его тремя подинomialными уравнениями в (шестимерном) пространстве $U \otimes V$ (иными словами, найдите три многочлена $P_1(\lambda), P_2(\lambda), P_3(\lambda)$ таких, что $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij} u_i \otimes v_j \in S$ тогда и только тогда, когда $P_1(\lambda) = 0, P_2(\lambda) = 0, P_3(\lambda) = 0$). д) Докажите, что его нельзя задать двумя полиномиальными уравнениями.