

Аффинные и евклидовы коники

Терминология. Рассмотрим евклидову плоскость \mathbb{R}^2 со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек стандартной аффинной карты U_0 комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Прямая $x_0 = 0$ на \mathbb{P}_2 называется *бесконечностью* и обозначается ℓ_∞ , коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ на \mathbb{P}_2 называется *изотропной* и обозначается I , точки пересечения $\ell_\infty \cap I$ называется *изотропными направлениями* и обозначается $I_\pm = (0 : 1 : \pm i)$. Коника на \mathbb{P}_2 называется *вещественной*, если её уравнение в координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ имеет вещественные коэффициенты. Гладкая вещественная коника называется, соответственно, *параболой*, *гиперболой* или *эллипсом*, если она касается бесконечности ℓ_∞ или пересекает её по двум вещественным или двум комплексно сопряжённым точкам. Точка F называется *фокусом* гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если прямые (FI_\pm) касаются C . Поляры фокусов называются *директрисами*. Полюс бесконечности ℓ_∞ называется *центром* коники. Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*. Диаметры, проходящие через бесконечные точки коники, называются *асимптотами*. Гладкие коники C с конечным центром (гиперболы и эллипсы) называются *центральнойми*. На пучке диаметров такой коники есть две инволюции: *сопряжённость* относительно C (неподвижные точки суть асимптоты коники C) и *перпендикулярность* (неподвижные точки суть изотропные направления коники C). Два одновременно сопряжённых и перпендикулярных друг другу диаметра называются *главными осями* гладкой центральной коники.

Г13♦1. Покажите, что диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные сопряжённому диаметру.

Г13♦2. Покажите, что перпендикулярность вещественных прямых равносильна а) их сопряжённости относительно изотропной коники б) гармоничности их направлений с изотропными.

Г13♦3. Выразите угол между двумя вещественными прямыми через двойное отношение их направлений с изотропными направлениями.

Г13♦4. Покажите, что у любой центральной коники есть вещественные главные оси, и напишите уравнение коники относительно этих осей.

Г13♦5 (окружности). Для гладкой вещественной коники C с $C \cap \mathbb{R}^2 \neq \emptyset$ докажите равносильность свойств: а) C проходит через I_\pm б) C центральна и имеет более одной пары главных осей в) C центральна и любые два её сопряжённых диаметра перпендикулярны.

Г13♦6. Покажите, что отличная от окружности гладкая центральная вещественная коника имеет ровно 4 фокуса, два из которых вещественны и лежат на одной главной оси, а два других не вещественны, комплексно сопряжены и лежат на другой главной оси. Дайте аналогичное описание директрис, а также фокусов и директрис параболы. Нарисуйте всё это на \mathbb{P}_2 .

Г13♦7 (парабола). Дайте определение оси параболы и покажите, что: а) в конечной точке ось пересекает параболу под прямым углом б) касательные, восстановленные в концах фокальной хорды, пересекаются под прямым углом на директрисе в) точки, симметричные фокусу относительно всевозможных касательных, лежат на директрисе г) фокус параболы, касающейся прямых (AB) , (BC) , (CA) , лежит на описанной около ΔABC окружности.

Г13♦8. Может ли парабола P на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 пересекаться с окружностью C ровно по а) трём точкам, если центр C не на оси P , б) двумя точками, если центр C на оси P ?

Г13♦9. Сформулируйте и докажите *фокальные свойства* параболы, эллипса и гиперболы¹.

Г13♦10. Покажите, что все хорды гладкой коники C , видимые из данной точки $p \in C$ под прямым углом, пересекаются в одной точке q , причём прямая (pq) перпендикулярна касательной $T_p C$.

Г13♦11 (директор коники). Покажите, что ГМТ, из которых центральная коника C видна под прямым углом, это концентричная с C окружность (она называется *директором* коники C).

Г13♦12 (гипербола Аполлония). Опишите ГМТ пересечений вращающегося диаметра данной коники с перпендикуляром, опущенным из данной точки на сопряжённый диаметр.

Г13♦13. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную конику?

¹Например, последнее звучит так: лучи света от точечного источника в вещественном фокусе гиперболы видны удалённому наблюдателю так, словно источник находится в другом вещественном фокусе.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
8а			
б			
9			
10			
11			
12			
13			