

1. Доказать, что функция  $az^2 + bz + c$  однолистка в выпуклой области в том и только том случае, когда она локально однолистка в этой области.

2. Пусть функции  $u, v$  непрерывно дифференцируемы в точке  $z_0$ , а функция  $f = u + iv$  — комплексно дифференцируема в этой точке, причем  $f'(z_0) \neq 0$ . Доказать, что линии уровня  $\{z: u(z) = u(z_0)\}$  и  $\{z: v(z) = v(z_0)\}$  пересекаются в точке  $z_0$  под прямым углом.

•3. а) Доказать, что функция  $f(z) = \sqrt{z^2}$  распадается над всем  $\mathbb{C}$  на две непрерывные ветви.

б) Проверить, что в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функция  $\operatorname{Ln} z$  не имеет непрерывных ветвей.

в) Описать все непрерывные ветви функции  $\sqrt[n]{z}$  в области  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , где  $\mathbb{R}_-$  — это отрицательная вещественная полуось.

•4. а) Найти общий вид ДЛО  $T$ , имеющего одну неподвижную точку (конечную или бесконечную), выписать общий вид отображения  $T^n$

б) Найти общий вид ДЛО  $T$ , имеющего две неподвижных точки (две конечные или одну конечную и одну бесконечную), выписать общий вид отображения  $T^n$ .

в) Найти предельные точки последовательности  $\{a_n\}$ , если  $a_1 = 0$  и

$$a_{n+1} = \frac{a_n + i}{a_n - i}, \quad a_{n+1} = 2 \frac{(2-i)a_n - 2i}{a_n + 2 - 4i}, \quad a_{n+1} = \frac{2(2+i)a_n + 1 - 2i}{(1-2i)a_n + 2(2+i)}.$$

5. Пусть функция  $f$  голоморфна и однолистка в  $\mathbb{D}$  и пусть  $f(0) = 0$ . Доказать, что функция  $\sqrt[n]{f(z^n)}$  распадается в  $\mathbb{D}$  на  $n$  голоморфных и однолистных ветвей.

6. Пусть многочлен  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + z$  однолистен в круге  $\mathbb{D}$ . Доказать, что  $n|a_n| \leq 1$ .

7. Доказать, что многочлен  $P = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  может быть однолистен в  $\mathbb{C}_+$  только тогда, когда его степень не выше 2.

•8. Найти какую-либо максимальную область конформности для функции а)  $\sinh z^2$ , б)  $\operatorname{Ж}(\operatorname{tg} z)$ , где  $\operatorname{Ж}(z)$  — функция Жуковского, в)  $\operatorname{Ж}((\operatorname{Ж}(z))^2)$ . Указать образы найденных областей и соответствие границ.

•9. Найти какие-либо конформные отображения областей, изображенных на рисунках (см. на обороте; необходимо решить 6 заданий по своему выбору) на единичный круг.

10. а) Конформно отобразить круг  $\{|z - 2i| < 2\}$  с разрезами  $[0, 2ti]$  и  $[(4-s)i, 4i]$ ,  $t, s \in [0, 1]$ , на этот же круг без разрезов со следующим соответствием границ:  $2ti \mapsto 0$ ,  $(4-s)i \mapsto 4i$ ,  $2+2i \mapsto 2+2i$ .

б) Конформно отобразить область  $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| > 2\}$  с разрезом  $(2i, (2+t)i]$ ,  $t \in [0, 1]$ , на эту же область со следующим соответствием границ:  $(2+t)i \mapsto 2i$ ,  $0 \mapsto 0$ ,  $2 \mapsto 2$ . Проследить динамику устранения разрезов при  $t \rightarrow 0$  и  $s \rightarrow 0$ .

