

## Кривые на плоскости и в пространстве

*Задача 1.* Докажите, что кривизна плоской кривой  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , где  $t$  — произвольный параметр, может быть найдена по формуле

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

*Задача 2.* Пусть три точки на плоской кривой лежат в общем положении, то есть не на одной прямой. Тогда через них можно провести единственную окружность. Устремим все три точки теперь к какой-то одной точке  $P$  на данной кривой. Найти радиус предельной окружности.

*Задача 3.* Докажите, что (а) если кривизна кривой тождественно равна нулю, то это прямая; (б) если кручение кривой тождественно равно нулю, то кривая лежит в плоскости. (в) Опишите кривые с постоянными кривизной и кручением. (б) Докажите, что кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, является окружностью.

*Задача 4.* Найдите точки экстремума кривизны (а) параболы; (б) эллипса. Определите радиусы кривизны в этих точках.

*Эволютой кривой называют множество ее центров кривизны.*

*Задача 5.* Рассмотрим кривую  $\gamma(t)$  на плоскости и функцию  $S_q(t) = \|\gamma(t) - q\|^2$  квадрата расстояния до фиксированной точки  $q \in \mathbb{R}^2$ . Докажите, что

(а) точка  $q$  принадлежит нормали к кривой тогда и только тогда, когда  $S'_q(t) = 0$ ;

(б)  $q$  является центром кривизны (лежит на эволюте) тогда и только тогда, когда  $S'_q(t) = S''_q(t) = 0$  (т.е. окружность кривизны имеет более высокий порядок касания с кривой);

(в)  $\gamma(t)$  к тому же является точкой экстремума кривизны (особой точкой эволюты) тогда и только тогда, когда  $S'_q(t) = S''_q(t) = S'''_q(t) = 0$  (т.е. в точках экстремума кривизны окружность кривизны имеет еще более высокий порядок касания с кривой).

*Задача 6.* Нарисуйте эволюту параболы и эллипса.

*Задача 7\*.* Докажите, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.