

Сингулярные гомологии и точные последовательности

▷ В задачах ниже можно пользоваться основными свойствами сингулярных гомологий (функториальность, гом. инвариантность, точная последовательность пары, вырезание, точная последовательность Майера-Вьеториса для открытых подмножеств).

Задача 6.1. Вычислите сингулярные гомологии а) точки; б) сферы; в) тора.

Задача 6.2. а) $H(X, A) \cong \tilde{H}(X \cup CA)$; б) $\tilde{H}_k(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{k-1}(X)$.

Задача 6.3. Для (относительных) гомотопических группа аксиома вырезания вообще говоря не выполняется.

Задача 6.4. Приведите пример подпространств X_1, X_2 клеточного пространства $X = X_1 \cup X_2$, для которых последовательность Майера-Вьеториса не точна.

Задача 6.5. Если $X = X_1 \cup X_2$ и для этой пары выполнены условия теоремы Майера-Вьеториса, то $\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_1 \cap X_2)$, где $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \operatorname{rk} H_i(X)$.

Задача 6.6*. Докажите при помощи теоремы Майера-Вьеториса, что гомологии дополнения к узлу в S^3 не зависят от узла (ср. с задачей 5.5).

Задача 6.7. Если гомоморфизм 5-членных точных последовательностей является изоморфизмом во всех членах, кроме, быть может, среднего, то он является изоморфизмом и в среднем члене. (Из двух аналогичных проверок — инъективности и сюръективности f_3 — одна уже была сделана на лекции, сделайте вторую.)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
 B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
 \end{array}$$

Задача 6.8. а) Постройте морфизм между функторами сингулярных и симплициальных гомологий конечных симплициальных пространств, являющийся изоморфизмом для пар $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

б) Докажите, что этот морфизм является изоморфизмом (указание: для доказательства шага индукции по размерности пригодится 5-лемма).