

Экспоненциальный закон

2◊1. Имеет место гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z) \quad \text{или} \quad (Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

2◊2. Пространство Y называется *локально компактным*, если для каждой точки $y \in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно.

Если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi: \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

непрерывно. В частности, *отображение вычисления*

$$e: Y \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow Z, \quad (y, f) \mapsto f(y)$$

непрерывно.

2◊3 (экспоненциальный закон). Определено каноническое отображение

$$\Phi: \mathcal{C}(X \times Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \quad \text{или} \quad \Phi: Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X,$$

при котором отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ переходит в отображение $\Phi(f): X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$, переводящее $x \in X$ в отображение $y \mapsto f(x, y)$.

Доказать, что если X хаусдорфово, а Y хаусдорфово и локально компактно, то Φ — гомеоморфизм.

Операции над топологическими пространствами

2◊4. Докажите, что для CW-комплексов джойн ассоциативен.

2◊5. Докажите, что $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ и $S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$.

2◊6. Пусть (X, x_0) , (Y, y_0) суть пространства с отмеченными точками. Докажите, что пространства

$$X * Y / (X * \{y_0\} \cup \{x_0\} * Y) \quad \text{и} \quad \Sigma(X \wedge Y) / \Sigma(\{x_0\} \wedge \{y_0\})$$

гомеоморфны.

2◊7. Пусть $\underline{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ — набор CW-комплексов. Обозначим $Z(C\underline{X}, \underline{X})$ подпространство в произведении $\prod_{j=1}^m CX_j$, состоящее из точек, хотя бы одна координата которых лежит в основании конуса. Докажите, что $Z(C\underline{X}, \underline{X})$ гомеоморфно $X_1 * \dots * X_m$.

2◊8. Докажите, что линейно связное пространство связно. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

2◊9. Покажите, что склейкой двух полноторий $S^1 \times D^2$ можно получить а) произведение $S^1 \times S^2$; б) сферу S^3 .