НМУ, Аналитические аспекты алгебраической теории чисел
Листок 2. 27.02.2024

Задача 1.
Найдите фундаментальные единицы в полях $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{7}), \mathbb{Q}(\sqrt{91})$.
Задача 2.
Пусть a — целое число. Найдите фундаментальные единицы в полях $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2+1})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2+a})$.
Задача 3.
Пусть p — простое число. Докажите, что уравнение $x^2 - py^2 = -1$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда $p \not\equiv 3 \pmod 4$.
Задача 4.
Пусть K — кубическое расширение $\mathbb{Q}$, имеющее одно вещественное вложение σ. Пусть v — единица порядка $\mathcal{O}$ в K и $\sigma(v) = w > 1$. Вычислив дискриминант кольца $\mathbb{Z}[v]$, докажите, что

$$\operatorname{disc}(\mathcal{O}) \leq 4(w^{3/4} + w^{-3/4})^4.$$

Задача 5.
В условиях предыдущей задачи покажите, что если единица v порядка $\mathcal{O}$ удовлетворяет неравенству

$$4(\sigma(v)^{3/4m} + \sigma(v)^{-3/4m})^4 < \operatorname{disc}(\mathcal{O}),$$

то $v = \varepsilon^k$, где ε — фундаментальная единица кольца $\mathcal{O}$ и $1 \leq k < m$.
Найдите фундаментальные единицы колец $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}], \mathbb{Z}[\alpha]$, где $\alpha^3 + 2\alpha + 1 = 0$, и $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{6}]$.
Задача 6.
Пусть N — натуральное число. Найдите фундаментальную единицу кольца $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{N^3 - 3N}]$.