Интеграл Лебега

1. Пусть $f(x)$ – измеримая по Лебегу функция, принимающая конечные значения на $[-1,1]$. Докажите, что

$$f_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{\mu} f(x), \qquad n \to \infty, \quad x \in [0,1].$$

2. (*Теорема Лузина*) Докажите, что для того, чтобы функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, была измерима, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая непрерывная на $[a,b]$ функция $\varphi(x)$, что

$$\mu\{x \,:\, f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon.$$

Иначе говоря, измеримая функция может быть сделана непрерывной на $[a,b]$ *путем ее изменения на множестве сколь угодно малой меры.*

3. Пусть $\mu(X) < \infty$ и f – сммируемая функция на X. Доказать, что интеграл Лебега $\int_X f(x)d\mu$ может быть вычислен по формуле

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_k \xi_k \mu(\{x \in X : t_k \leqslant f \leqslant t_{k+1}\}),$$

где $T = \{t_k\}$ – разбиение вещественной оси, $\lambda(T) = \sup_k |t_k - t_{k+1}|$ – диаметр разбиения T, а $\{\xi_k\}$ – любой набор точек, удовлетворяющий условию $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Выражение называется *интегральной суммой Лебега*.

4. Докажите, что, если $\int_A f(x)d\mu = 0$ и $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in A$, то $f(x) = 0$ почти всюду на A.

5. Докажите, что интеграл $\int_{[a,b]} f(x)d\mu$ от неотрицательной на $[a,b]$ функции $f(x)$ совпадает с мерой Лебега «криволинейной трапеции»:

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = \mu\{(x,y) \,:\, a \leqslant x \leqslant b,\ \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

6. (а) Путь $\mu(X) < \infty$. Докажите, что неотрицательная измеримая функция f на X суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\{x \in X \,:\, f(x) \geqslant 2^n\}.$$

(б) Докажите, что неотрицательная ограниченная измеримая функция f на множестве X бесконечной меры суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu\{x \in X \,:\, f(x) > \frac{1}{2^n}\}.$$

7*. (Критерий Лебега интегрируемости по Риману) Докажите, что функция интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена и почти всюду непрерывна.