

Листок 2, 19 февраля 2024 г.

Задача 1. Докажите, что интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ гомеоморфен \mathbb{R} .

Задача 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение топологических пространств. Предположим, что Y – хаусдорфово. Докажите, что множество

$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

замкнуто в X . Докажите, что если $f: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение хаусдорфова пространства X на себя, то множество неподвижных точек

$$C = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

замкнуто в X .

Задача 3. Пусть τ_1 и τ_2 – топологии на множестве X , причем $\tau_1 \subset \tau_2$. Предположим, что (X, τ_2) компактно. Докажите, что (X, τ_1) компактно.

Задача 4. Приведите пример топологий τ_1 и τ_2 на множестве X таких что, $\tau_1 \not\subset \tau_2$ и $\tau_2 \not\subset \tau_1$.

Задача 5. Докажите, что компактное хаусдорфово пространство регулярно (для любой точки и для любого замкнутого множества, не содержащего эту точку, существуют непересекающиеся открытые окрестности). Докажите, что оно нормально (любые два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся открытые окрестности).

Задача 6. Пусть X, Y, Z – топологические пространства. Докажите, что отображение $f: Z \rightarrow X \times Y$ непрерывно тогда и только тогда когда композиции с естественными проекциями $\text{pr}_1 \circ f: Z \rightarrow X$ и $\text{pr}_2 \circ f: Z \rightarrow Y$ непрерывны.

Задача 7. Пусть отображения топологических пространств $f: X_1 \rightarrow X_2$ и $g: Y_1 \rightarrow Y_2$ непрерывны. Определите естественное отображение

$$f \times g: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

и покажите, что оно непрерывно.

Задача 8. Определим график Γ_f непрерывного отображения топологических пространств $f: X \rightarrow Y$ следующим образом:

$$X \times Y \supset \Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

Докажите, что ограничение естественной проекции $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X$ индуцирует гомеоморфизм $X \simeq \Gamma_f$.

Задача 9. Докажите, что топология на топологическом пространстве X дискретна тогда и только тогда, когда диагональ

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

открыта в $X \times X$.

Задача 10. Докажите, что топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Задача 11. Докажите, что произведение топологических пространств $X \times Y$ компактно тогда и только тогда, когда X и Y компактны.

Задача 12. * Докажите теорему Тихонова: произведение непустого множества компактных пространств компактно.

Задача 13. Докажите, что график непрерывного отображения из связного пространства связан.

Задача 14. Докажите, что произведение топологических пространств $X \times Y$ связно тогда и только тогда, когда X и Y связны.

Задача 15. Докажите, что отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связан.

Задача 16. Опишите все связные открытые подмножества вещественной прямой \mathbb{R} .