Теория групп - 2.

Задача 1. а) Выясните, при каких n имеется изоморфизм $GL_n(\mathbb{R}) \simeq SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$.

б) Докажите, что $(\mathbb{Q}, +)$ не является прямым произведением двух нетривальных подгрупп.

Задача 2. а) Верно ли, что подгруппа прямого произведения двух групп $G_1 \times G_2$ является прямым произведением $H_1 \times H_2$, где $H_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2$ подгруппы?

б*) Пусть G и H – произвольные группы. Определим множество пятёрок $(G_1, G_2, H_1, H_2, \varphi)$, где $G_2 \trianglelefteq G_1 \leq G$, $H_1 \trianglelefteq H_2 \leq H$ и $\varphi : G_1/G_2 \to H_1/H_2$ – изоморфизм. Тогда соответствие

$$\{\text{пятёрки}\} \to \{\text{подгруппы}\, G \times H\}$$
$$(G_1, G_2, H_1, H_2, \varphi) \mapsto X = \{(g, h) \,|\, \varphi(gG_2) = hH_2\} \subset G \times H$$

является биекцией.

в*) Опишите все подгруппы группы $\mathbb{Z}_5 \times S_4$.

Задача 3. Опишите сохраняющие ориентацию и полные группы симметрий: **а)** тетраэдра **б)** куба/октаэдра **в)** додекаэдра/икосаэдра.

Задача 4. а) Докажите, что $S_n \simeq A_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ и явно предъявите соответствующий гомоморфизм групп.

б) Пусть V – векторное простарнство над полем $\Bbbk$. Пусть $Aff(V) = \{\varphi \,|\, \varphi(x) = Ax{+}b, A \in GL(V), b \in V\}$ – группа аффинных преобразований. Докажите, что $Aff(V) \simeq V \rtimes GL(V)$ и явно предъявите соответствующий гомоморфизм групп.

в) Рассмотрим группу Гейзенберга H_p строго верхнетреугольных матриц 3×3 над полем $\mathbb{F}_p$ и для $p = \infty$ над кольцом $\mathbb{Z}$. Задайте H_p образующими и соотношениями.

г) Докажите, что если $p \neq \infty$, то $H_p \simeq (\mathbb{F}_p)^2 \rtimes (\mathbb{F}_p)$ и явно предъявите соответствующий гомоморфизм групп.

д) Верно ли, что $H_\infty \simeq \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$? Если да, то явно предъявите соответствующий гомоморфизм групп.

е) Рассмотрим группу G и гомоморфизм $\varphi : G \to Aut(g), g \to \mathrm{Ad}_g$. Докажите, что $G \rtimes_\varphi G \simeq G \times G$.

ж) Пусть Q_8 – группа единичных кватернионов, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – группа вычетов порядка n по сложению. При каких n существует единственное (с точностью до изоморфизма) полупрямое произведение

$$Q_8 \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}?$$

Задача 5. Приведите пример **а)** группы с двумя композиционными рядами, факторы которых нетривиально переставлены друг относительно друга; **б)** двух неизоморфных групп с одинаковыми композиционными факторами Жордана-Гёльдера; **в)** бесконечной группы, которая у которой есть конечный композиционный ряд; **г)** бесконечной группы, для которой не существует конечного композиционного ряда.

Задача 6. Выведите основную теорему арифметики для кольца $\mathbb{Z}$ из теоремы Жордана-Гёльдера.

Задача 7. а) Докажите, что любая группа порядка p^2 (p - простое) – абелева.

б) Докажите, что любая группа порядка pq (p, q - простые) – разрешима, причём не нильпотентна, если $p \neq q$.

в) Опишите с точностью до изоморфизма все группы порядка pq (p, q - простые).

г) Для каких n группа D_{2n} разрешима? нильпотентна?

Задача 8. Покажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) Любая конечная группа нечётного порядка разрешима.
(2) Любая неабелева конечная простая группа имеет чётный порядок.

Задача 9. Докажите, что группы $PSL(2, \mathbb{F}_2)$ и $PSL(2, \mathbb{F}_3)$ – не являются простыми.