Действия групп на множествах и приложения.

Задача 1. Опишите ядро, все орбиты и стабилизаторы для действия группы G на множестве X:
а) $G = GL(V)$, $X = V$;
б) $G = GL(V)$, X – множество всех подпространств в V;
в) $G = GL(V)$, X – множество всех упорядоченных пар подпространств в V;
г*) $G = GL(V)$, X – множество всех упорядоченных троек подпространств в V.
д) $GL_n(\mathbb{C})$, $X = M_n(\mathbb{C})$ сопряжениями.

Задача 2. Рассматривая действие группы $PGL_2(\mathbb{F})$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ для конечных полей $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4$, покажите, что **а)** $PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$; **б)** $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$; **в)** $PGL_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$.

Задача 3. а) Пусть $G = GL_n(\Bbbk)$, B —- подгруппа верхнетреугольных матриц. Постройте биекцию G/B и множества полных флагов
$$\{0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V \mid \dim V_k = k\}$$
при которой естественное действие G на флагах соответствует действию G на G/B.
б) Рассмотрим множество частичных флагов
$$X = \{0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_i = V \mid \dim V_i = k_i\}.$$
Найдите подгруппу в $P_{k_1,\ldots,k_i} \subset GL_n(\Bbbk)$ для которой $G/P \simeq X$ как множества с действием группы.

Задача 4. а) Сколькими способами можно раскрасить шахматную доску, состоящую из 16 клеток в два цвета?
б) Сколькими способами можно раскрасить стороны квадрата в n цветов?
в) Сколькими способами можно раскрасить грани куба в n цветов?

Задача 5. Обозначим за $P(d, n)$ количество различных ожерелий из d бусин, покрашенных в n цветов.
а) Воспользуйтесь формулой Бернсайда и вычислите $P(6, n)$, как функцию от n;
б) Докажите, что для фиксированного d число $P(d, n)$ является многочленом по n. Как его можно вычислить?
в) Верно ли, что количество способов раскрасить вершины заданного графа в n разных цветов является многочленом от n?

Задача 6. Укажите какую-нибудь силовскую p-подгруппу и вычислите количество силовских p-подгрупп в группах **а)** S_p; **б*)** S_{p^2}; **в)** $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Задача 7. а) Перечислите все группы порядка pq , **б)** Докажите, что группа порядка pqr разрешима, если числа p q и r простые. **в)** Перечислите все группы порядка не больше 15 с точностью до изоморфизма. **г)** Докажите, что группы порядка < 60 разрешимы. **д)** Докажите, что простая группа порядка 60 изоморфна A_5. **е)** Докажите, что любая неабелева группа порядка $61 \leq n < 168$ – не проста. **ж)** Докажите, что группа порядка 315 – не проста.

Задача 8. а) Докажите, что каждая силовская подгурппа нормальна тогда и только тогда когда группа нильпотентна.
б) Докажите, что нильпотентная группа изоморфна прямому произведению своих нетривиальных силовских подгрупп.

Задача 9. Дискриминант $D(f)$ многочлена $\prod(x - x_i)$ называется многочлен $\prod(x_i - x_j)^2$.
а) Вычислите дискриминант $f(x) = x^2 + px + q$ через коэффициенты f.
б) Вычислите дискриминант $f(x) = x^3 + px + q$ через коэффициенты f. Докажите, что если $p, q \in \mathbb{R}$, то в случае $D(f) > 0$ имеется три вещественных корня, а в случае $D(f) < 0$ – один. Что можно сказать в случае $D(f) = 0$?

Задача 10*. Вычислите дискриминант $f(x) = x^4 + cx^2 + dx + e$. В случае $c, d, e \in \mathbb{R}$ проведите анализ знаков дискриминанта и наличия вещественных корней.

Задача 11. С помощью критерия Ивасавы докажите простоту: **а)** $A_n, n > 5$; **б)** $PSL_2(\Bbbk)$, $|\Bbbk| > 3$; **в)** $PSL_n(\Bbbk)$.