Билинейные и квадратичные формы - 1.

Задача 1. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Докажите, что билинейная форма B – антисимметрическая тогда и только тогда, когда $B(x,x)=0$ для любого $x \in V$. Верно ли это в характеристике 2?

Задача 2. Рассмотрим симметрическую билинейную форму на $\mathbb{R}^5$ с матрицей Грама:

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 14 & -5 & -3 & 8 \\ 14 & -17 & 2 & 5 & -8 \\ -5 & 2 & -12 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & 3 & -3 & 1 \\ 8 & -8 & 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру B.
б) Найдите ортогональный базис для B.
в) Найдите ранг и сигнатуру ограничения B ограничения на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 7x_5 = 0; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$$

Задача 3. а) Найдите ранг и сигнатуру билинейной формы на $M_n(\mathbb{R})$:

$$B : (X,Y) \mapsto \operatorname{tr}(XY).$$

б) Найдите ортогональный базис.
в) Найдите разложение Витта и соответствующий базис.

Задача 4. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами
а) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$;
б) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0$;
в) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$?
Если да, то какая у неё может быть сигнатура?

Задача 5. Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{sl}_2$ матриц 2 со следом 0. Каждому элементу $x \in \mathfrak{sl}_2$ сопоставим линейный оператор $\operatorname{ad} x : y \to [y,x]$. Определим симметрическую билинейную форму на $\mathfrak{sl}_2$ следующим образом $B(x,y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)$.

а) Запишите матрицу этой формы в базисе $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите ортогональный базис для этой формы.
б) Докажите, что $B(x,y) = c \cdot \operatorname{tr}(xy)$, где $c \in \mathbb{C}$ и найдите c.

Задача 6. а) Пусть $V = Mat_2(\Bbbk)$. Докажите, что $B : A \mapsto \det(A)$ – квадратичная форма на V и найдите соответствующую симметрическую билинейную форму. **б)** Найдите сигнатуру этой формы для $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Задача 7. а) Пусть B – невырожденная симметрическая билинейная форма на V такая, что ограничение на подпространства U, W – невырождены и пусть $f : U \to W$ – изометрический изоморфизм. Докажите, что он продолжается до изометрического изоморфизма $\varphi : V \to V$, причем $\varphi|_U = f$.
б) Докажите, что группа изометрий симметрической билинейной формы действует транзитивно на k-мерных изотропных и $2k$-мерных гиперболических подпространствах, $1 \leq k \leq \frac{\dim V}{2}$.