Эрмитовы пространства.

Задача 1. Определим угол $0 \le \varphi \le \pi$ между векторами $u, w \in \mathbb{C}^2$ $\cos\varphi = \frac{|(u,w)|}{||u||\cdot||w||}$. Здесь (u,w) – стандартаня Эрмитова форма на $\mathbb{C}^2$. Докажите, что

$$\varphi = \min_{u_1\in\mathbb{C}\cdot u\simeq\mathbb{R}^2, ||u_1||=1, u_2\in\mathbb{C}\cdot v\simeq\mathbb{R}^2, ||u_2||=1} \angle(u_1, u_2)$$

Задача 2.
а) Докажите, что для любая матрица из $GL_n(\mathbb{C})$ может быть единственным образом представлена в виде произведения $A = UT$, где $U \in U_n$, а $T \in M_n(\mathbb{C})$– верхнетреугольная матрица с положительными вещественными числами на диагонали.
б*) Докажите, что $\pi_1(GL_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$.

Задача 3. Докажите, что любой $\mathbb{C}$-линейный оператор на эрмитовом пространстве имеет в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольную матрицу.

Задача 4. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$ – полярное разложение оператора $\mathcal{A}$. Докажите, что $\mathcal{A}$ – нормальный тогда и только тогда когда $\mathcal{B}$ коммутирует с $\mathcal{C}$.

Задача 5. а) Докажите, что группа $U_n \subset M_n(\mathbb{C})$ – компактна и связна.
б) Обозначим через $H \subset M_n(\mathbb{C})$ пространство эрмитовых матриц. Докажите, что отображение

$$\exp : H \to U_n$$

сюръективно, но не инъективно.
в) Докажите, что $U_n \simeq O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

Задача 6. Докажите, что любая $A \in M_n(\mathbb{C})$ единственным образом представляется в виде произведения $A = BCD$, где $B, D \in U_n$, а $D \in M_n(\mathbb{R})$ – диагональная, с положительными собственными значениями.

Задача 7. а) Найдите полярное разложение матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
б) Найдите сингулярное разложение той же матрицы.

Задача 8. Введём эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}[x,y,z]$ по правилу.

$$(x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1}, x^{k_2}y^{l_2}z^{m_2}) = k_1!l_1!m_1!\delta_{k_1k_2}\delta_{l_1l_2}\delta_{m_1m_2}$$

Обозначим через

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

оператор Лапласа, а через r^2 – оператор умножения на $x^2+y^2+z^2$. Определим S^k – пространство однородных многочленов степени k и $H_k = \operatorname{Ker}\Delta|_{S^k}$.
а) Докажите, что операторы Δ и r^2 сопряжены относительно введённого скалярного произведение.
б) Докажите, что

$$S_k = H_k \oplus r^2 H_{k-2} \oplus r^4 H_{k-4} + \dots$$

Задача 9*. [Простая конечная группа $PSU_n(q)$]
Рассмотрим поле порядка q^2, где $q = p^n, p$ – простое. Рассмотрим автоморфизм поля порядка 2 $x \to x^q$, который будем обозначать через $\bar{x}$. Пусть V – векторное пространство размерности n над F_{q^2}.
а) Докажите, что на V с точностью до изометрического изоморфизма существует ровно одна невырожденная полуторолинейная форма B. Группа изометрий этой формы обозначается через $U_n(q)$.
б) Докажите, что порядок $U_n(q)$ равен

$$q^{n(n-1)/2}\prod_{i=1}^{n}(q^i - (-1)^i)$$

.

в) Обозначим через $SU_n(q) \subset U_n(q)$ подгруппу матриц с определителем 1. Докажите, что $|U_n(q) : SU_n(q)| = q+1$. Докажите, что центр $SU_n(q)$ имеет порядок $q+1$. По определению, $PSU_n(q) := SU_n(q)/Z$.
г) Докажите, что $SU_2(q) \simeq SL_2(q)$.
д) Докажите, что $PSU_3(2)$ – разрешимая группа порядка 72.
е) Докажите, что группа $SU_n(q)$ порождается унитарными трансвекциями

$$T_v(\lambda) : x \mapsto x + \lambda B(x,v)v,$$

$\lambda \in F_{q^2}, \lambda^{q-1} = -1$, v – изотропный вектор.
ж) Рассмотрев действие на изотропных векторах докажите с помощью критерия Ивасавы, что $PSU_n(q)$ – простая, $n > 3$ или $n = 2, q > 3$.