Раскраски гиперграфов

Данила Черкашин

Гиперграф H это пара (V, E), где V — множество вершин, а $E \subset 2^V$ — множество ребер. То есть, в отличие от ребра обычного графа, состоящего из двух вершин, ребро гиперграфа может иметь произвольный размер. Гиперграф называется n-однородным, если любое его ребро имеет размер n. Раскраска вершин гиперграфа в k цветов называется *правильной*, если любое ребро содержит вершины хотя бы двух цветов. *Хроматическим числом* гиперграфа называется минимальное число χ, такое что гиперграф можно покрасить в χ цветов правильным образом.

Нас интересует минимальное количество ребер в гиперграфе, не имеющем правильной раскраски в r цветов. Эта величина обозначается $m(n, r)$.

1 Полученные результаты

Теорема 1. Пусть r фиксированное число, тогда существует такое $c > 0$, что для любого n выполняется

$$m(n, r) \geq c(n/\ln(n))^{1-1/r} r^{n-1}.$$

Теперь усилим требование на правильность раскраски, и попросим любое ребро содержать не менее k вершин каждого цвета, где $1 \leq k \leq n/2$. Обозначим минимальное количество ребер в гиперграфе, не имеющем правильной раскраски в 2 цвета за $m_k(n)$. Очевидно, $m_1(n) = m(n, 1)$, однако нас будут интересовать большие значения k.

Теорема 2. Пусть t фиксировано, тогда для любого натурального k выполняется

$$m_k(2k + t) = O(\ln n^{t+1}).$$

Гиперграф называется кликой, если любые два его ребра пересекаются. Несложно показать, что $\chi(H) \leq 3$, если H является кликой. Выясняется, что в нетривиальной клике не может быть произвольно много ребер. Обозначим максимальное количество ребер в n-однородной клике с хроматическим числом 3 за $M(n)$.

Теорема 3. Существует такое $c > 0$, что для любого n выполняется

$$M(n) \leq cn^{n-1/2} \ln n.$$

2 Проект будущих исследований

Планируется улучшить оценки на $m(n, r)$ при фиксированном n, в то время как r стремится к бесконечности, в частности найти точную асимптотику для $n = 3$.

Планируется показать, что при фиксированном t величина $m_k(n)$ ограничена сверху константой, а также найти нетривиальные нижние оценки на величину $m_k(n)$, если k является медленно растущей функцией от n.

Планируется улучшить оценки на величину $m(n, 1)$ при малых n.

Недавно построен явный пример гиперграфа с $(r + o(1))^n$ ребрами и хроматическим числом $r + 1$. Планируется обощить этот пример на величину $m_k(n)$ при медленно растущем k. Отдельно стоит задача построить явный пример гиперграфа, не имеющего *полноцветной* раскраски в r цветов. Стоит отметить, что аналогичный вероятностный метод дает пример гиперграфа из $(1 + 1/r + o(1))^n$ ребер и не имеющего полноцветной раскраски, а также показывает, что любой граф с меньшим числом ребер обладает полноцветной раскраской.