

3. Краткий план исследования (заявитель Макаров И.А.)

Объектом исследования являются представления функций замкнутых классов трехзначной проекционной логики формулами. **Предметом** исследования являются проблемы существования конечных полных систем тождеств и связанных с ними канонических видов формул. В процессе исследования применяются **методы** синтеза булевых формул, метод разделения и редукции. Метод аксиоматизации **применен** автором для сравнения деревьев решений на данных, которые могут быть истинны, ложны или не определены.

Актуальность проекта

Р.К. Линдон [Lyndon (1951)] доказал, что для каждого замкнутого класса Булевой логики существует конечная полная система тождеств (КПСТ), т.е. для любой конечной порождающей системы замкнутого класса существует КПСТ. В [Lyndon (1954)], он привел пример конечно порожденного замкнутого класса из 7-значной логики, который не обладает КПСТ, хотя имеет счетную полную систему тождеств, замыкание которой является множеством всех возможных тождеств над порождающей системой. В.В. Вишин [Vishin (1963)] и В.Л. Мурский [Murskii (1968)] нашли примеры конечно порожденных замкнутых классов 4-значной и 3-значной логик соответственно, с тем же свойством, что они имеют только счетные полные системы тождеств и не имеют КПСТ. Проблема нахождения необходимого и достаточного условий существования КПСТ для некоторого конечно порожденного замкнутого класса остается открытой.

Д. Лау [Lau (2006)] нашла частичное решение для другой известной проблемы конечной порождаемости замкнутых классов в случае ограничения на подмножество рассматриваемых функций многозначной логики – так называемые, *проекционные логики*, в которых множество допустимых значений каждой нетривиальной функции является собственным подмножеством множества значений исходной многозначной логики. В след за Д. Лау мы рассмотрели 3-значную проекционную логику, функции которой принимают булевы значения 0 и 1, а переменные, подающиеся на вход функции, – 0, 1, 2. Если рассматривать ограничения всех функций замкнутого класса 3-значной проекционной логики на булевых наборах, то мы получим так называемую проекцию, являющуюся замкнутым классом Булевой логики.

Проведенные исследования

В статье [Makarov (2015)] было доказано существование КПСТ для замкнутых классов 3-значной проекционной логики, проектирующихся во всю *Булеву логику* или в *предполные классы, сохраняющие 0 или 1* (значения всех функций на наборе из одних 0 (1) равны 0 (1)). Одновременно с доказательством КПСТ были построены канонические виды формул и предложены алгоритмы, приводящие произвольную формулу к ее каноническому виду. В работе [Gerasimova, Makarov (2015)] было доказано существование КПСТ для замкнутых классов 3-значной проекционной логики, имеющих своей проекцией *класс линейных булевых функций*, за исключением одного класса, который имеет только счетную порождающую систему и счетную полную систему тождеств. В работе [Makarov, Gerasimova (2015)] было дано описание предложенного заявителем *метода разделения*, применяемого для построения канонических видов формул в порождающих системах замкнутых классов 3-значной проекционной логики. Результаты исследований представлены автором на международных конференциях 10th Panhellenic Logic Symposium и 5th World Congress on Universal Logic, заседаниях семинара «Математические модели информационных технологий» департамента анализа данных и искусственного интеллекта под руководством С.О. Кузнецова. Применение изложенных в статьях методов было представлено в статьях о моделировании искусственного интеллекта [Makarov et. al. (2015), (2016)] на основе логического сравнения деревьев решений на трехзначных данных.

Проект исследований

В находящейся на рецензии в журнале Logica Universalis статье автора рассматривается три случая применения метода разделения для построения канонического вида формул замкнутых классов 3-значной проекционной логики, получаемых в зависимости от способов разделения общего канонического вида на меньшие канонические виды и обеспечения единственности общего вида.

Автором готовится публикация результатов о 23 замкнутых классах, имеющих своей проекцией класс монотонных булевых функций, а также для проектирующихся в класс самодвойственных булевых функций – для каждого из них доказано существование КПСТ и построен канонический вид формул.

На основании полученных результатов о существовании КПСТ для классов 3-значной проекционной логики, проектирующихся в предполные классы Булевой логики, автор собирается использовать альтернативный метод доказательства теоремы Линдона, изложенный в статье [Ugolnikov (2009)], и обобщить доказательство теоремы Линдона для замкнутых классов Булевой логики, в которые проектируется конечное число замкнутых классов 3-значной проекционной логики – предполагается проверить гипотезу о том, что все такие классы обладают КПСТ.

Нашей целью также является улучшение результатов [Bongini et. al. (2016)] о сложности аксиоматизируемости замкнутых классов многозначной логики для случая проекционной логики и сравнение известных SAT решателей для многозначных логик [Gomes et. al. (2007)] с применением метода разделения для построения канонических видов формул для замкнутых классов проекционной логики.

Планируется ежегодно публиковать результаты исследований по проекту в международном рецензируемом журнале или сборнике трудов конференции, индексируемом в Scopus или Web of Science.

Использование наработок проекта в преподавательской деятельности

Вопросы функциональной выразимости в замкнутых классах многозначной логики освещаются на научных семинарах для выбора студентами курсовых и дипломных работ по теме проекта, и изучаются в курсе «Комбинаторика, графы и вычислительная логика» (in English) на факультете компьютерных наук НИУ ВШЭ.