Щечкин Антон Игоревич, краткое изложение заявки.

1 Проведенные исследования

Исследование посвящено связи уравнений Пенлеве и теории представлений. Данная область началась более-менее с работы Гамаюна-Иоргова-Лисового (2012) в которой было предложено без доказательства представление τ-функции для уравнения Пенлеве VI в виде явной суммы по конформным блокам алгебры Вирасоро с центральным зарядом 1.

Хорошо известно что естественный подход к уравнениям Пенлеве – задача об изомонодромных деформациях плоской связности (линейной задачи) на сфере с выколотыми точками. Уравнение Пенлеве VI приходит из самого простого нетривиального случая изомонодромной деформации линейной задачи с матрицами 2×2 и четырех выколотых точек.

Удалось доказать разложение τ функции пользуясь разложением модуля Верма алгебры супер Вирасоро+майорановский фермион по модулям Верма обычной алгебры Вирасоро. Отсюда получаются билинейные соотношения на конформные блоки которые эквивалентны утверждению про разложение τ функции по конформным блокам.

В другой работе были получены ответы на ряд простых вопросов возникающих в связи с разложением τ-функции уравнения Пенлеве III(D_8).

- У этого уравнения существует единственная симметрия решений – преобразование Бэклунда типа $\mathbb{Z}_2$. Мы нашли, как оно действует на нашем пространстве τ-функций.
- Были получены два типа уравнений, связывающих τ-функции и ее преобразование Бэклунда: т.н. Окамото-подобные и Тода-подобные уравнения.
- У преобразования Бэклунда существуют две неподвижные точки $\sigma = 1/4, s = \pm 1$, которые соответствуют единственным двум алгебраическим решениям Пенлеве III(D_8) $\tau(z) = z^{1/16}e^{\mp 4\sqrt{z}}$. Это дает нам линейные соотношения на $c = 1$ конформные блоки. Мы проинтерпретировали этот вопрос в терминах теории представлений, а именно показали, что это соотношение следует из разложения фоковского модуля по модулям Верма со старшими весами $(n + 1/4)^2, n \in \mathbb{Z}$.
- Наконец, в доказательстве разложения τ функции был использован только Навье-Шварцевский сектор алгебры супер Вирасоро. Мы показали, что из Рамоновского сектора следуют Окамото-подобные уравнения, а из Навье-Шварцевского – Тода-подобные.

В следующей работе мы начали исследование q-деформированных уравнений Пенлеве с точки зрения классификации Сакаи $\mathbb{CP}^2$ раздутого в 9 точках по фактору рациональных преобразований. Вершины в диаграмме этой классификации соответствуют уравнениям Пенлеве – как непрерывным так и деформированным. Деформированное уравнение Пенлеве приходит к нам из некоторого соотношения на группу симметрий соответствующего раздутого $\mathbb{CP}^2$. Мы показали, что

- Это уравнение в непрерывном пределе в точности переходит в классическую форму уравнения Пенлеве III(D_8)
- Это уравнение эквивалентно системе уравнений: q-деформированным Тода-подобным уравнениям.
- q-деформированная τ функция есть сумма по q-деформированным конформным блокам.
- Наконец, получена q-деформация для алгебраической τ-функции через двойной q-символ Похгаммера.

2 Проект будущих исследований

- Деформированное уравнение Пенлеве приходит к нам, как соотношение на сдвиг, который лежит в группе симметрий, с условием, что этот сдвиг действует на функцию этого деформированного уравнения Пенлеве, как на скаляр: $w(G)(Z) = G(w(Z))$. Наша задача – поднять это свойство на всю группу, а точнее, описать двузначность функции $G(Z)$, которая возникает при этом.

- Следующая задача – найти решение для $\tau(Z)$ которое бы поднималось на всю группу, как в прошлом пункте. Основная проблема здесь – это элементы группы симметрии, которые переводят $Z \mapsto Z^{-1}$. Есть надежда, что соответствующие симметрии конформных блоков будут получены из науки про топологические струны.

- Естественная задача – обобщение на менее вырожденные Пенлеве. Исходя из непрерывного предела и исследованного случая $A_7^{(1)'}$ разумно было бы ожидать, что ответ для $A_{7-N}^{(1)}$, $N \leq 7$ дается с помощью 5d $SU(2)$ статсуммы Некрасова для калибровочной теории с N фундаментальными мультиплетами.

- Представление τ-функции через q-деформированные конформные блоки доказано с точностью до билинейных соотношений на конформные блоки, которые можно было бы доказывать пользуясь теорией представлений тороидальных алгебр.

- Существует другой подход к q-деформированным Пенлеве – а именно q-деформация изомонодромной задачи. Необходимо выяснить, как связана полученная нами τ-функция с этим подходом.

  Тот же вопрос про ещё один подход – т.н. "singularity confiment который считается q-деформированным аналогом свойства Пенлеве и свойством дискретной интегрируемости. Суть его в том, что достижение бесконечности при дискретной эволюции все равно позволяет восстановить начальные условия. Небольшие продвижения в направлении дискретной интегрируемости есть: так было обнаружено, что при действии группы сдвигов бесконечного порядка на τ-функции наблюдается явление Лорана.

- Когда станет понятна связь с изомонодромной задачей, следующим шагом будет обобщение на задачу Гарнье. В непрерывном случае соответствующие соотношения мы уже умеем выписывать, но до сих пор не умеем интерпретировать. Следующий шаг обобщения — матрицы ранга выше 2 в линейной задаче.

- Вопрос также в том, поднимается ли интерпретация ур. Пенлеве как неавтономных гамильтоновых систем на дискретный уровень. Удовлетворительный ответ на этот вопрос даст нам возможность попробовать получить q-деформацию Окамото-подобных уравнений.

- Важной задачей представляется q-деформация представления τ-функции через фредгольмовы детерминанты.