Краткое изложение заявки, Summary.pdf, Теплицкая Яна Игоревна

15 октября 2016 г.

Я, в основном,занимаюсь одномерными задачи оптимизации формы, возникающие из матфизики, вариационных задач и уравнений в частных производных. Вот некоторые из них:

1. Самосжимающиеся кривые.

   Пусть E — метрическое пространство с расстоянием d. Кривая θ: $I \to E$, где $I \subset \mathbb{R}$ (возможно, бесконечный) интервал, называется самосжимающейся, если для любых трех точек $\{t_i\}_{i=1}^3 \subset I$ таких что $t_1 \le t_2 \le t_3$, выполняется $d(\theta(t_3), \theta(t_2)) \le d(\theta(t_3), \theta(t_1))$. В частности, интересны непрерывные самосжимающиеся кривые в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В работах разных математиков доказано, что любая самосжимающаяся относительно Евклидовой нормы кривая, которая содержится в ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$, обязательно имеет конечную длину. Позже этот результат был расширен на гладкие строго-выпуклые нормы. Однако оставался открытым вопрос о том, остается ли утверждение верным для произвольной нормы в конечномерном пространстве. Нам удалось дать утвердительный ответ на этот вопрос.

   Сделано: Доказана конечность длины самосжимающихся кривых, содержащихся в компакте, для любой нормы в $\mathbb{R}^n$. [опубликован препринт]

   Планы: Приложения и следствия этого результата.

2. Задача об оптимальном трубопроводе.

   Для заданного компакта M рассматриваем класс замкнутых связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $F_M \le r$ для заданного $r > 0$, где F_M — функционал максимального расстояния от множества Σ до множества M:

   $$F_M(\Sigma) := \max_{y \in M} \operatorname{dist}(y, \Sigma),$$

   а $\operatorname{dist}(y, \Sigma)$ означает расстояние между y и Σ. В этом классе нас интересуют множества минимальной хаусдорфовой длины $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ (минимайзеры).

   Существует два основных вида задач в этой области:

   (a) нахождение минимайзеров для частных случаев;
   (b) доказательство свойств минимайзеров в общем случае.

   Сделано:

   (a) Для замкнутой выпуклой кривой M, имеющей радиус кривизны не менее R найден глобальный минимайзер в случае если $R > 5r$ (для окружности можно заменить 5 на 4.98) (результат не опубликован, но докладывался на семинарах. Задача для окружности была поставлена в работе Миранды, Паолини и Степанова. (результат не опубликован, но докладывался на семинарах. Выложен препринт.
   (b) Получен близкий результат для локальных минимайзеров в вышеуказанных предположениях.
   (c) Получен результат для некоторых многоугольников. В частности, для квадрата.
   (d) Доказана регулярность минимайзеров (этот и последующие результаты не опубликованы, но докладывались)

(e) Получена полная классификация локального поведения минимайзера.

(f) Доказана конечность числа точек ветвления (точек порядка 3) минимайзера.

Планы:

(a) Решить некоторые другие частные задачи.

3. Бесконечное дерево Штейнера.

Постановка задачи Штейнера: пусть A – заданное компактное подмножество метрического пространства X. Определим множество
$$\mathcal{S}t(A) := \{S \subset X : S \cup A \text{ is connected}\}.$$

Задача Штейнера заключается в том, чтобы найти элемент множества $\mathcal{S}t(A)$, обладающий минимальной длиной $\mathcal{H}^1$.

Известно, что этот элемент будет являться деревом, которое называется деревом Штейнера и обладает не более чем счетным числом точек ветвления (невисячих вершин). Задача состояла в том, чтобы построить пример дерева со счетным числом точек ветвления. Задача успешно решена, работа опубликована.