Краткое изложение плана исследований Авилова Артёма Алексеевича

Проективное многообразие является важнейшим объектом алгебраической геометрии, поэтому одной из важных задач является изучение группы Кремоны – группы бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$. Классическая задача, связанная с группами Кремоны – классификация их конечных подгрупп с точностью до сопряжения (и, в частности, элементов конечного порядка). Известно, что группы Кремоны удовлетворяют свойству Жордана – существует такая константа N, что для любой конечной подгруппы группы Кремоны в ней есть нормальная абелева подгруппа индекса не более, чем N. Поэтому можно ожидать, что конечные подгруппы в группе Кремоны малого ранга допускают разумную классификацию.

Изучение конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ было начато Бертини и продолжена многими другими математиками. Классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была завершена И. Долгачёвым и В. Исковских (за исключением некоторых специальных случаев). Суть метода классификации состоит в следующем. Пусть G – конечная подгруппа в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Тогда действие G регуляризуется, т.е. существует неособое проективное многообразие Z, на котором G действует *бирегулярными* автоморфизмами с эквивариантным бирациональным отображением в $\mathbb{P}^2$. После эквивариантных стягиваний (-1)-кривых, мы получим G-многообразие, которое является либо G-расслоением на рациональные кривые над $\mathbb{P}^1$ с группой Пикара ранга 2, либо G-минимальной поверхностью дель Пеццо. Классифицировав все возможные минимальные группы для расслоений на коники и для поверхностей дель Пеццо, Долгачёв и Исковских получили полную классификацию конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ (по модулю некоторых серий). Действуя аналогичным способом в трёхмерном случае, можно классифицировать конечные подгруппы в трёхмерной группе Кремоны, однако задача становится гораздо сложнее, поскольку очень сильно растет число возможных классов рациональных G-расслоений Мори, а каждый класс очень широк.

В своих предыдущих работах я классифицировал рациональные G-многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4, которые не перестраиваются в более простые многообразия G-Фано (в противном случае соответствующие подгруппы уже описаны) и в G-расслоения Мори (поскольку группы автоморфизмов расслоений Мори следует изучать отдельно и другими способами). Полученные списки состоят из шести многообразий для случая степени 3 и из четырёх многообразий и одной однопараметрической серии в случае степени 4. Для двух полученных многообразий я доказал бирациональную жёсткость – таким образом, полученные подгруппы в группе Кремоны не могут быть получены из других G-расслоений Мори.

Кроме того, я доказал теорему, усиливающую для трёхмерных многообразий над полями характеристики нуль теорему Саркисова, о том, что у лбого G-расслоения на рациональные кривые есть стандартная модель – она является G-расслоением Мори на коники и плоским морфизмом гладких многообразий. Одним из следствий этой теоремы является то, что для описания конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны достаточно изучать только гладкие G-расслоения Мори на коники, а не все, что потенциально существенно упрощает их описание.

Я планирую продолжить работу, начатую в моих прошлых статьях. Ввиду того, что многие планируемые результаты представляют собой довольно обширные классификации некоторых классов G-многообразий Фано, ожидаемые формулировки в большинстве случаев привести невозможно. В течение первого года я планирую классифицировать все рациональные G-многообразия Дель Пеццо степеней 1 и 2, которые не допускают перестройки в более простые многообразия G-Фано и G-расслоения Мори. Такие многообразия позволяют получить подгруппы в трёхмерной группе Кремоны, которые не были известны ранее. Кроме того, в течение первого года я планирую описать все бирационально жёсткие G-многообразия Дель Пеццо степеней 3 и 4.

В течение второго года я планирую заниматься описанием групп автоморфизмов трёхмерных многообразий Фано индекса 1. Для рациональных многообразий планируется проверка бирациональной жёсткости и классификация соответствующих им новых подгрупп в группе Кремоны.

В дальнейшем я планирую перейти к более сложным классам G-расслоений Мори на рациональные кривые и на поверхности дель Пеццо. Планируется описать (или хотя бы ограничить) возможные группы их автоморфизмов.