Конкурс 'Молодая математика России'

Илья Д. Шкредов

Обыкновенная (аддитивная) энергия множества, то есть L_2–норма свертки его характеристической функции – это классический объект теории чисел и аддитивной комбинаторики. С одной стороны, аддитивная энергия имеет понятную комбинаторную интерпретацию из-за ее связи с константой удвоения множества, а с другой стороны, она естественным образом связана с тригонометрическими суммами, поскольку представляет собой L_4–норму преобразования Фурье характеристической функции множества. Наличие этих двух свойств у аддитивной энергии и объясняет ее важность в задачах комбинаторной теории чисел.

В этой классической области соискатель предложил две новые идеи. Во-первых, он стал рассматривать энергию, как действие некоторого оператора, соответствующего изучаемому множеству. В такой постановке информация о свойствах множества обуславливается характеристиками указанного оператора, например, его собственными числами, поведением собственных функций и т.д. И действительно, этот подход, был успешно применен в ряде приложений, скажем, в проблематике, связанной с распределением элементов мультипликативных подгрупп. Дело в том, что в подобных вопросах наш оператор поддается полному описанию, что, в свою очередь, и позволяет продвинуться в рассматриваемых задачах. Во-вторых, соискатель предложил оперировать старшими моментами сверток характеристических функций множеств – величинами, которые естественно выражаются в терминах собственных значений соответствующих операторов, а также имеют интересную комбинаторную интерпретацию. Это позволило еще более расширить круг приложений нашего метода. Мы нашли новую оценку классической тригонометрической суммы Хейльбронна, получили ряд приложений к распределению частных Ферма, усилили результаты о суммах и энергиях выпуклых множеств и множеств с малым мультипликативным удвоением, установили точные структурные результаты о строении множеств в терминах старших энергий, доказали оптимальные версии фундаментальных теорем комбинаторной теории чисел, например, теоремы Балога-Семереди-Гауэрса, Крута-Сисаска, Каца-Коестера и др. Мы планируем развивать данный подход, а также найти его новые приложения.

Операторный метод, метод старших энергий, а также другие комбинаторные и геометрические соображения позволили нам продвинуться в важной области математики: теории сумм произведений. В разное время этими вопросами занимались такие математики как Семереди, Бурган, Тао, Эрдеш, Ружа, Катц, Хельфготт, Гараев, Конягин, Руднев и др. Грубо говоря, утверждается, что произвольное конечное множество некоторого кольца (например, кольца целых чисел) не может одновременно иметь хорошую аддитивную и мультипликативную структуру, то есть его сумма или произведение обязано быть большим (либо же это множество имеет большое пересечение с некоторым подкольцом кольца). Данная область математики уже нашла многочисленные приложения в теории чисел, аддитивной комбинаторике, теоретической информатике, динамических системах и криптографии. Мы получили лучшие на данный момент результаты по суммам произведений в случае двух полей $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}_p$. Также мы нашли целый ряд приложений феномена сумм произведений к классическим и новым задачам теории чисел и аддитивной комбинаторике. Например, оказалось, что важнейший вопрос аддитивной комбинаторики, а именно, задача о нахождении необходимых условий для множества быть суммой, тесно связан с суммами произведений и мы доказали несколько результатов в этом направлении. Мы планируем продолжать эту деятельность.