Задачи на собственные значения для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Проект посвящен исследованию задач на собственные значения для квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке с различными типами краевых условий; для определения дискретных собственных значений вводится дополнительное условие: на одной из границ отрезка фиксируется значение собственной функции (или ее производной).

Задачи, которым посвящен проект, имеют свою специфику:

• во-первых, хорошо известные методы исследования нелинейных задач на собственные значения, например, теория бифуркаций и ветвления решений (Красносельский М.А., Вайнберг М.М. и Треноги В.А.), метод Абросетти – Рабиновица (Ambrosetti A., Rabinowitz P.H.), к изучаемым задачам не применимы;

• во-вторых, если рассмотреть линейную задачу, которая получается из нелинейной отбрасыванием нелинейного члена, то такая задача всегда имеет лишь конечное число вещественных (и положительных) собственных значений[1]. При этом исходная нелинейная задача, например, для кубической нелинейности, имеет бесконечное число собственных значений, из которых лишь конечное число переходят в решения соответствующей линейной задачи в линейном пределе [21] (см. Список публикаций), а значит, к рассматриваемым задачам не применимы и методы теории возмущений.

Для исследования задач по проекту будет применяться метод интегральных дисперсионных уравнений [19], который позволяет (эквивалетно) сводить исходную задачу на собственные значения к некоторому трансцендентному уравнению, называемому дисперсионным, относительно спектрального параметра[2]. Дисперсионное уравнение имеет вид, удобный для дальнейшего исследования и позволяет получать результаты как для случая уравнений и систем, так и для случая различных краевых условий [19, 21, 24, 25, 28].

Основным ограничением используемого метода является невозможность исследовать задачи на собственные значения для нелинейных неавтономных уравнений. Попытка развить метод для решения таких задач – одно из направлений исследований настоящего проекта.

Предлагаемое исследование будет проводиться в двух направлениях:

(1) изучение вопроса о влиянии скорости роста нелинейной «добавки» на существование бесконечного числа собственных значений. Возможно, и это будет проверено, что достаточно медленный рост функции нелинейности уже не приводит к существованию бесконечного числа собственных значений. Указанная проверка приведет к формулировке и доказательству результата для класса нелинейностей, характеризуемых их ростом. Кроме того, интересно исследовать задачи с краевыми условиями третьего рода, зависящими от спектрального параметра. На этом пути также предполагается получить результаты, в которых указаны условия на рост (по спектральному параметру) коэффициентов в краевых условиях;

(2) распространение метода интегральных дисперсионных уравнений на случай задач на собственные значения для нелинейных неавтономных уравнений.

По каждому из указанных направлений и задач предполагается получить следующие результаты: доказать существование бесконечного числа изолированных собственных значений и найти их асимптотику, выяснить периодичность (в случае автономного уравнения) и распределение нулей собственных функций, а также поведение собственных функций при больших значениях спектрального параметра.

Результаты по направлению **(1)** могут быть получены применением метода интегральных дисперсионных уравнений [19] в комбинации с техникой вычислений, представленной в работе [28]; для получения результатов по направлению **(2)** будет использоваться техника дифференциальных неравенств, которая позволит обойти ограничение используемого метода, связанное с автономностью дифференциальных уравнений.

[1] В основном для нелинейных уравнений изучаются задачи на собственные значения, в которых соответствующая линейная задача является классической задачей Штурма – Лиувилля, имеющая бесконечное число вещественных собственных значений.

[2] При этом, знание явных решений нелинейного дифференциального уравнения не требуется.