

Краткое изложение заявки

Е. Ю. Смирнов

Сферические кратные многообразия флагов. Рассматриваются прямые произведения нескольких многообразий флагов G/P_i , для которых диагональное действие группы G сферично (т.е. борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет лишь конечное число орбит). Эти многообразия можно рассматривать как аналоги многообразий флагов, а B -орбиты на них и их замыкания — как аналоги клеток и многообразий Шуберта. Наша цель состоит в изучении множества B -орбит с комбинаторной и геометрической точек зрения. Ранее была получена классификация этих орбит в прямом произведении двух грассманианов и для их замыканий построены разрешения особенностей. Планируется обобщить эти результаты на всевозможные произведения двух комиковесовых флаговых многообразий. Далее, планируется выяснить, какие из построенных разрешений являются малыми, и вычислить соответствующие многочлены Пуанкаре слоёв (аналоги многочленов Каждана–Люстига). Кроме того, для всевозможных двойных многообразий флагов планируется вычислить классы когомологий, представляющие замыкания B -орбит, построив для них торические вырождения (совместная работа с А. Кнутсоном).

Исчисление Шуберта, K -теория многообразий флагов и многогранник Гельфанда–Цетлина. Совместно с В. А. Кириченко и В. А. Тимориным описан новый подход к исчислению Шуберта на многообразии полных флагов, использующий кольцо Пухликова–Хованского многогранника Гельфанда–Цетлина. Каждому циклу на многообразии флагов сопоставляется линейная комбинация граней данного многогранника, с точностью до некоторых явно описываемых соотношений между гранями. В итоге получается комбинаторная модель для теории пересечений на многообразии флагов: произведению двух циклов Шуберта отвечает пересечение соответствующих им наборов граней многогранника Гельфанда–Цетлина (при условии, что эти наборы граней трансверсальны). Кроме того, получены формулы, выражающие характер модуля Демажюра, многочлен Гильберта и степень многообразия Шуберта при данном вложении через количество целых точек и объём отвечающего этому многообразию Шуберта набора граней многогранника Гельфанда–Цетлина.

Далее мы планируем построить комбинаторную модель для кольца Гротендика $K(G/B)$ многообразия флагов при помощи операций над гранями многогранника Гельфанда–Цетлина, аналогично тому, как это уже было сделано для кольца когомологий. Каждому элементу кольца Гротендика при этом будет сопоставляться некоторая линейная комбинация граней многогранника; тензорному произведению расслоений, т.е. их произведению в кольце $K(G/B)$, будет отвечать пересечение наборов граней, а сумме — разность объединения и пересечения соответствующих наборов граней. У нас уже имеется гипотеза о том, как должно выглядеть соответствие между расслоениями, отвечающими циклам Шуберта, и наборами граней. В частности, мы планируем проинтерпретировать в терминах пересечения граней многогранника Гельфанда–Цетлина известные явные формулы для умножения элементов K -группы: формулы Монка и Пьери.

Многообразия Фано и Калаби–Яу как сечения расслоений на многообразиях флагов. Это совместная работа с К. А. Шрамовым. В 1995 году О. Кюхле получил классификацию четырехмерных многообразий Фано индекса 1, являющихся множествами нулей набора общих сечений однородных векторных расслоений на грассманианах типа A . При этом проверка того, является ли множество нулей общих сечений данного набора векторных расслоений многообразием Фано, является по сути дела задачей теории представлений. Эта конструкция — источник новых примеров четырехмерных многообразий Фано. Мы собираемся применить тот же метод к грассманианам произвольных типов (т.е. многообразиям G/P , где P — максимальная параболическая подгруппа), что, как мы надеемся, позволит построить новые примеры многообразий Фано и Калаби–Яу, реализуемых как множества нулей общих сечений однородных векторных расслоений на таких многообразиях.

E-mail address: esmirnov@hse.ru

Date: 15 октября 2016 г.