Краткое изложение заявки

А.А. Сагдеев

Автор планирует вести исследования по трем тесно связанным друг с другом направлениям.

Первое из них связано с задачей отыскания хроматического числа плоскости $\chi(\mathbb{R}^2)$, являющейся открытой математической проблемой вот уже на протяжении почти 70 лет. За эти годы было рассмотрено множество различных обобщений исходной задачи. Одним из самых широких ее обобщений является задача о нахождении $\chi(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ хроматического числа метрического пространства $\mathcal{X}$ с запрещенным метрическим пространством $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^n, l_p)$ и величина $\chi(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ стремится к бесконечности, с ростом n, то говорят, что $\mathcal{Y}$ является l_p-рамсеевским. Про некоторые конкретные пространства ответ на вопрос, рамсеевкие они или нет известен. Случай $p = 2$ изучался в литературе наиболее активно. Сформулировано несколько гипотетических критериев, позволяющих описать все l_2-рамсеевские пространства, однако эти критерии пока не доказаны.

Проведенные исследования: автор получил несколько явных нижних оценок показывающих, насколько быстро стремятся к бесконечности с ростом n соответствующие хроматические числа для некоторых конкретных l_p-рамсеевских пространств. Хоть эти оценки и являются наилучшими из известных, они, вероятно, очень далеки от оптимальных.

Будущие исследования: улучшить некоторые из упомянутых нижних оценок, получить верхние оценки соответствующих хроматических чисел, отдельно изучить случай $p = \infty$ и, возможно, найти новые $l_\infty-$рамсеевские метрические пространства, получить новые нижние оценки измеримых хроматических чисел.

Вторoе из трех направлений исследования связано с изучением семейств множеств с запрещенными пересечениями. Эти семейства множеств являются единственными известными конструкциями, позволяющими получать нижние оценки хроматических чисел из первого абзаца. Их изучение было начато такими классиками экстремальной комбинаторики, как Франкл, Уилсон и Редль. Разработанный Франклом и Уислоном линейно-алгебраический метод позволяет утверждать, что любая "достаточно большая"совокупность множеств специального вида содержит внутри запрещенное пересечение. Метод, разработанный Франклом и Редлем позволяет утверждать, что таких пересечений будет "очень много". Доказательства, предложенные Франклом и Редлем были неконструктивны, а линейно-алгебраический метод предполагает простоту некоторого вспомогательного параметра.

Проведенные исследования: в некотором специальном случае результат Франкла и Редля конкретизирован и значительно усилен, внесен вклад в улучшение оценки Франкла-Уислона в некотором специальном случае.

Будущие исследования: конкретизировать результат Франкла-Редля в остальных случаях, избавиться от простоты вспомогательного параметра в задаче Франкла-Уилсона с помощью представления произвольного значения параметра в виде суммы нескольких простых чисел.

Последнее из направлений исследования связано с изучением вопроса о том, насколько большим может быть хроматическое число дистанционных графов, обхват которых не меньше некоторого фиксированного числа l. О'Доннел доказал, что при любом $l \in \mathbb{N}$ на плоскости существует дистанционный граф с хроматическим числом 4. Купавский доказал, что для каждого $l \in \mathbb{N}$ существует такая константа $\xi_l > 1$, что в $\mathbb{R}^n$ существует дистанционный граф с хроматическим числом не меньше $(\xi_l + o(1))^n$. Результат Купавского был неконструктивен.

Проведенные исследования: получена явная нижняя оценка чисел ξ_l.

Будущие исследования: усилить полученную ранее нижнюю оценку чисел ξ_l за счет усиления оценки в задаче Франкла-Редля, о которой говорилось во втором абзаце.