

Постановка задачи. Уравнение почти-Матье – одна из главных моделей в теории почти-периодических операторов. Это – одномерное разностное уравнение Шредингера на \mathbb{Z} с потенциалом $v(n) = a \cos(2\pi(hn + b))$, где $a > 0$, $0 < b < 1$ и $0 < h < 1$ – параметры, а n – целочисленная переменная. Для иррациональных h спектр уравнения почти-Матье является канторовым множеством [1]. Мы планируем получить конструктивное описание, подобное описанию классического канторова множества. Спектральные свойства уравнения почти-Матье сильно зависят от разложения параметра h в цепную дробь. Задача-минимум – получить полное ясное конструктивное описание геометрии спектра в случае, когда все знаменатели достаточно велики. Задача-максимум – получить конструктивное описание спектра в случае, когда имеется бесконечная подпоследовательность элементов, стремящаяся к бесконечности.

Проведенные исследования. Впервые конструктивным асимптотическим описанием занялись V. Helffer и J. Sjostrand: они придумали асимптотическую процедуру для описания спектра в случае $a = 1$. Затем Буслаев и Федотов придумали точную перенормировочную процедуру (метод монодромизации), выполнили ее первый шаг в случае $a = 1$: появилось детальное описание последовательности экспоненциально малых интервалов, содержащих спектр, дали естественное объяснение этому явлению и наметили путь для дальнейшего анализа.

Для последующего исследования квазиклассических асимптотик решений разностных уравнений, возникающих в процедуре монодромизации, нами был систематически развит аналог комплексного метода ВКБ для разностных уравнений. Сначала изучались скалярные разностные уравнения [3], [4], а затем метод был обобщен на матричные разностные уравнения [5]. Развитые методы имеют самостоятельный интерес. Готовится развернутая публикация о фазе Берри для матричных разностных уравнений и ее приложениях.

Также в этом году разработанный аппарат был успешно применен для исследования асимптотических свойств отображения монодромии, определяющего динамическую систему, возникающую в рамках метода монодромизации. Это отображение удалось описать всюду, кроме малых окрестностей точек многообразия, где характер асимптотик усложняется. Результаты данного шага готовятся к публикации.

Затем нами были изучены квазиклассические асимптотики оператора почти-Матье для $a < 1$. Спектр асимптотически разбивается на два участка: на одном участке возникает последовательность экспоненциально малых интервалов, содержащих спектр, а на другом – интервалы, содержащие спектр, разделены экспоненциально малыми лакунами. Результаты приняты к печати, и будут опубликованы в *Mathematical Notes*, Vol.6, 2018 [6].

Проект будущих исследований. Анализ естественно разбивается на три этапа: (а) исследование коэффициентов второго уравнения цепочки (порожденного исходным уравнением Шредингера, которое считается первым), как функций спектрального параметра; (б) исследование асимптотических свойств отображения монодромии, выражающего коэффициенты каждого из уравнений цепочки (начиная с третьего) через коэффициенты предыдущего; (в) исследование траекторий динамической системы. Первый этап по существу выполнен Буслаевым и Федотовым, второй шаг нами выполнен за исключением описания отображения монодромии в малых окрестностях “особых” точек. Эти точки также вносят важный вклад в формирование спектра. План работ 2019-2020: исследовать малые окрестности “особых” точек и заняться исследованием динамической системы.

Список литературы

- [1] A. Avila, S. Jitomirskaya, The Ten Martini Problem, 2009, *Ann. of Math.*170, 303-342.
- [2] A.A. Fedotov, Monodromization method in the theory of almost-periodic equations, 2014, *St. Petersburg Math. J.* 25(2), 303–325.
- [3] A.A. Fedotov, E.V. Shchetka. The complex WKB method for difference equations in bounded domains. *Journal of Mathematical Sciences (New York)* 2017, 224:1 157-169.
- [4] A. Fedotov, E. Shchetka. Complex WKB method for a difference Schrödinger equation with the potential being a trigonometric polynomial. *St. Petersburg Mathematical Journal* 29 (2018), 363-381.
- [5] A. Fedotov, E. Shchetka. Berry phase for difference equations. *Days on Diffraction 2017*, pp. 113-116, St. Petersburg: IEEE. <https://doi.org/10.1109/DD.2017.8168007>
- [6] A. Fedotov, E. Shchetka. Quasiclassical asymptotics of the spectrum of the subcritical Harper operator, to appear in *Mathematical Notes*, Vol. 6, 2018.