План исследования

Илья Каржеманов

0.1. Пусть S – гладкая проективная поверхность над полем $\mathbb{C}$. Производная категория $D^b(S)$ когерентных пучков на S служит богатым источником геометрических свойств и инвариантов поверхности S. Одним из таковых является наличие *полного исключительного набора* в $D^b(S)$ или, более общо, набора $\{E_1, \dots, E_n\}$ объектов в $D^b(S)$, для которых $\mathrm{Hom}^\bullet(E_i, E_j) = 0$, $i > j$, и $\mathrm{Hom}^\bullet(E_i, E_i) = \mathbb{C}$, чьи классы составляют базис в группе Гротендика $K_0(S)$ (соответственно в гомологиях Хохшильда $HH_\bullet(S)$).

Для таких наборов важной характеристикой является *полуортогональное дополнение* A_S в $D^b(S)$ к категории, порожденной всеми $E_1, \dots, E_n$ (ср. [1]). Категория A_S вообще говоря зависит от E_i; она называется *фантомной категорией.* Такие A_S предположительно "чувствуют" некоторые дифференциально- и алгебро-геометрические свойства поверхности S – такие например как рациональность (в работе [2] развивается эта идеология "категорных инвариантов Дональдсона").

В этой связи важным представляется вопрос в частности о нетривиальности A_S (для подходящих E_i); см. также [3], [4], где обсуждаются другие свойства фантомных категорий. Первые примеры поверхностей S с $A_S \neq 0$ были построены в статьях [5], [6] (см. также [7], [8]). Примеры составляли поверхности *общего типа*, а главным аргументом в рассуждении являлось зануление групп $H^1(S, L)$, для специальных линейных расслоений L на S (ср. [9]).

0.2. Целью предлагаемого исследования является нахождение новых примеров поверхностей S с $A_S \neq 0$ среди *эллиптических поверхностей* (здесь естественно наложить условие $b_1(S) = p_g(S) = 0$ на первое число Бетти и геометрический род). Основными объектами будут служить S с морфизмом $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, чей общий слой – эллиптическая кривая, причем f имеет ровно *два кратных* (схемных) слоя; такие S называются *поверхностями Долгачева.*

В работе [10] был найден первый пример поверхности Долгачева с нетривиальной фантомной категорией. Там S была построена с помощью деформации специальной (особой) рациональной поверхности. К сожалению, неявный характер рассуждений в [10] затрудняет понимание E_i в $D^b(S)$ и того факта, что $A_S \neq 0$. На самом деле, данная ситуация типична, так как для поверхностей Долгачева известна (до недавнего времени) только аналитическая конструкция (с помощью *логарифмического преобразования* в неособых слоях f).

Мы хотим исследовать более явные примеры S и E_i (см. ниже) с целью лучшего понимания причины нетривиальности A_S – это позволит приблизиться к доказательству существования фантомной категории для произвольной поверхности Долгачева.

0.3. В работе [2] воспроизводится *явная (геометрическая)* конструкция, принадлежащая И.В. Долгачеву, одного семейства поверхностей Долгачева с кратными слоями типа $(2, 3)$. Для такой поверхности S_0 можно выписать базис решетки Пикара, после чего исключительный набор $\{E_1, \dots, E_n\}$ в $D^b(S_0)$ находится прямым вычислением с помощью PARI GP; заметим, что $n = 12$ в данном случае, а все E_i являются линейными расслоениями. Далее, нетривиальность соответствующей подкатегории A_{S_0} доказывается исходя из того, что группа монодромии морфизма f содержит "геометрическую" часть $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Aut}\, S_0$.

Предыдущий пример мы хотели бы использовать для следующей интерпретации $E_1, \dots, E_{12}$ и $A_S \neq 0$ в случае более общего класса поверхностей Долгачева. Именно, *якобиан* $\mathrm{Jac}\, S_0$ поверхности S_0 является рациональной поверхностью, с морфизмом $j : \mathrm{Jac}\, S_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ и ассоциированной *модулярной кривой* C. Кривая C задается триангуляцией $\mathbb{P}^1$, которая в данном случае состоит из 12ти треугольников $\Delta_1, \dots, \Delta_{12}$. Относительная связность Гаусса-Манина для j задает над каждым из Δ_i проективную структуру и, как следствие, 12 *разных* орбит $O_1, \dots, O_{12}$ в коприсоединенном представлении алгебры Вирасоро.[1)]

Окончательно, мы планируем строить линейные расслоения $L_1, \dots, L_{12}$ на $\mathrm{Jac}\, S_0$, с условием $\mathrm{Hom}(L_i, L_j) = 0$, $i > j$, в терминах орбит O_i и проективных структур на Δ_i. Переход к S_0 и E_i осуществляется тогда с помощью замены $z \mapsto p(z)$ в центре алгебры Вирасоро, где $p(z)$ – многочлен степени 3, делящийся на z^2. Аналогичная конструкция будет развита для других поверхностей Долгачева (при некотором условии на якобиан) с кратными слоями произвольного типа (m, n). Мы также опишем категорию A_S в этих терминах и попробуем доказать ее нетривиальность.

Список литературы

[1] A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties.* arXiv: alg-geom/9506012.
[2] I. Karzhemanov, L. Katzarkov, *Categorical Donaldson invariants, explicit Dolgachev surfaces and exceptional collections,* ... . In preparation.
[3] S. Galkin, L. Katzarkov, A. Mellit, E. Shinder, *Minifolds and Phantoms.* arXiv:1305.4549. IPMU 13-0102.
[4] D. Orlov, *Derived noncommutative schemes, geometric realizations, and finite dimensional algebras.* arXiv:1808.02287.
[5] S. Galkin, E. Shinder, *Exceptional collections of line bundles on the Beauville surface.* Adv. Math. **244** (2013), pp. 1033-1050.
[6] S. Galkin, L. Katzarkov, A. Mellit, E. Shinder, *Derived categories of Keum's fake projective planes.* Adv. Math. **278** (2015), pp. 238-253.
[7] V. Alexeev, D. Orlov, *Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections.* Math. Ann. **357** (2013), pp.743-759.
[8] S. Gorchinskiy, D. Orlov, *Geometric phantom categories.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), pp. 329-349.
[9] S. Galkin, I. Karzhemanov, E. Shinder, *Acyclicity of non-linearizable line bundles on fake projective planes.* arXiv:1602.06107.
[10] Y. Cho, Y. Lee, *Exceptional collections on Dolgachev surfaces associated with degenerations.* Adv. Math. **324** (2018), 394-436.
[11] А.В. Зотов, А.В. Смирнов, *Модификации расслоений, эллиптические интегрируемые и связанные задачи.* ТМФ. **177** (2013), 3-67.

1) ср. с тем как возникает нестационарное уравнение Шредингера из уравнения Пенлеве (см. [11])